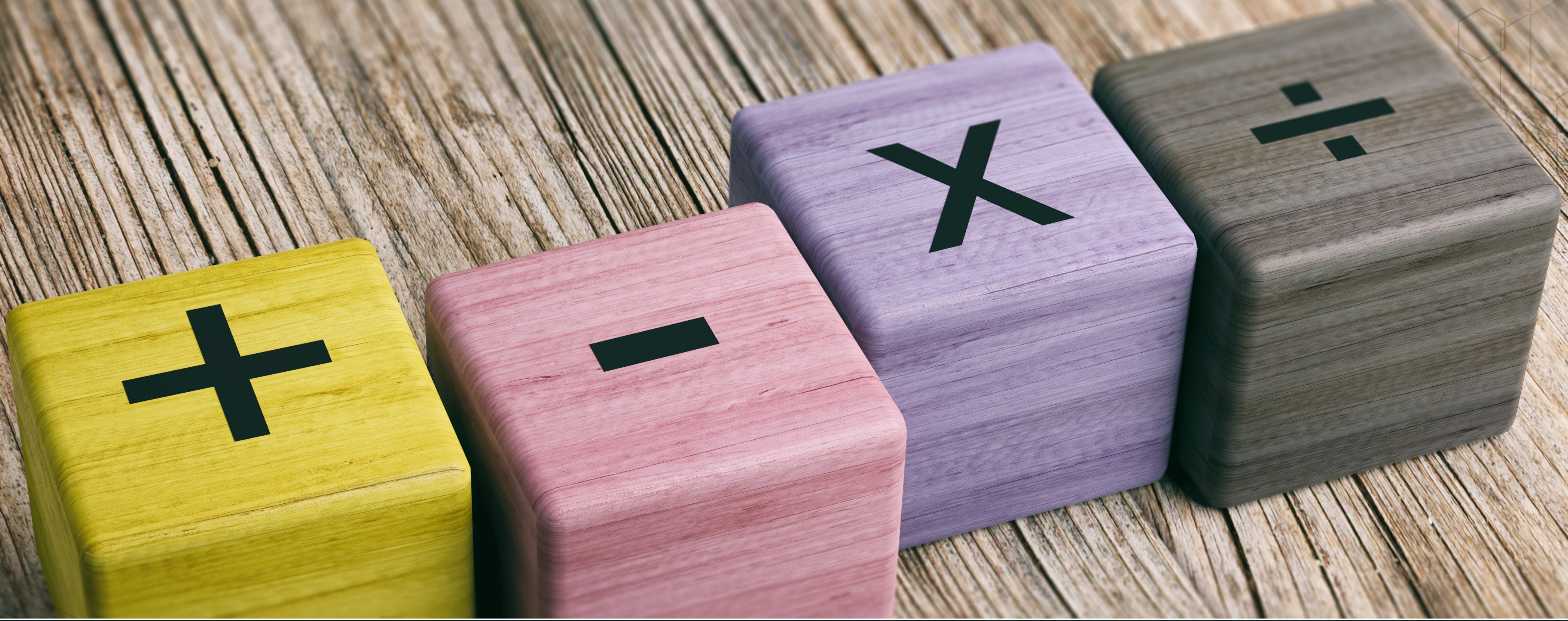
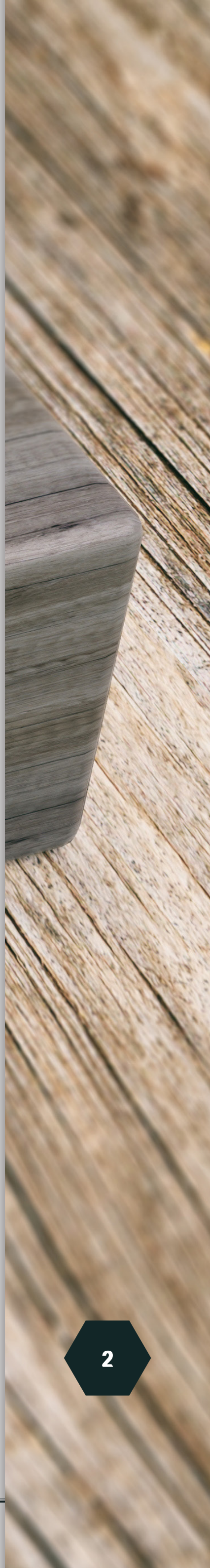
מדינת ישראל
משרד החינוך
המזכירות הפדגוגית
אגף א' מדעים, הפיקוח על הוראת המתמטיקה



תוכנית הלימודים במתמטיקה לכיתות ז-ט

ירושלים



תוכנית הלימודים במתמטיקה לחטיבות הביניים

מבוא כללי

תוכנית לימודים זו מיועדת להוראת המתמטיקה בכיתות ז, ח, ט (בחטיבות ביניים או כיתות ז ו-ח בבתי ספר יסודיים וכיתות ט בבתי ספר תיכוניים). התוכנית כוללת שלושה תחומי תוכן: **התחום המספרי** (כולל סטטיסטיקה והסתברות), **התחום האלגברי והתחום הגאומטרי**, תוך התבססות על תכנים שנלמדים בבית הספר היסודי (א-ו) והרחבתם. כמו כן, התוכנית מהווה בסיס לתכנים שיילמדו בחטיבה העליונה. התוכנית מיועדת לכלל תלמידי ישראל בכיתות ז-ח, ולתלמידי כיתות ט אשר מתעתדים ללמוד מתמטיקה באחת הרמות המוגברות בחט"ע; התאמת התכנים של כיתה ט לתלמידים שלא ילמדו מתמטיקה ברמה מוגברת בחט"ע תפורסם בנפרד.

האפיונים התוכניים העיקריים של התוכנית הם:

- לימוד של מיומנויות חישוב משולב עם לימוד לקראת הבנה, כך שהמיומנויות יתמכו בפיתוח ההבנה, ופיתוח ההבנה יתמוך בלימוד המיומנויות ובחיזוקן. מיומנויות החישוב מתייחסות לידע של ביצוע פרוצדורות אריתמטיות ואלגבריות. לימוד לקראת הבנה כולל הבנת מושגים, מציאת קשרים בין מושגים שונים ופתרון בעיות (מתמטיות ומתחומי דעת אחרים).
- הדגשת דרכי חשיבה, דרכי עבודה ודרכי שיח האופייניים למתמטיקה: זיקוק רעיון מתוך התנסויות והכללות, הכרת הגדרה ויישומה, "מידול" ו"סימול" (שימוש בשפה מתמטית כדי לייצג בעיות, לפתור אותן ולבקר את פתרונן), פיתוח הסברים וטיעונים (מתן הסברים ובחינה ביקורתית של הסברים של אחרים), מעקב אחר מהלכי הוכחה והבנתם ויכולת בניית הוכחות פשוטות, שימוש בייצוגים ובכלים שונים ופיתוח אסטרטגיות לפתרון בעיות.
- שילוב מושכל של שלושת התחומים המתמטיים (מספרי, אלגברי וגאומטרי) הכולל הדגמות, המחשות (ויזואליות או אחרות), שיקולים, הסברים, הוכחות ופתרון בעיות על ידי יישום כלים או גישות של אחד התחומים בתחום אחר. שילוב זה נועד לחיזוק ולהעמקת הידע המתמטי והעשרתו, לצורך קישור בין נושאים וכמתן אפשרויות למידה שונות לתלמידים עם נטיות/העדפות מתמטיות שונות.
- לימוד "ספירלי" המבוסס על כך שהתלמידים נחשפים לאותו נושא או רעיון מתמטי מרכזי מספר פעמים במהלך שלוש השנים בכל התחומים, כאשר בכל פעם מתווספים רבדים ורמות פירוט ו/או עומק, בהתאם לידע, לניסיון ולתחכום המתמטי שנצברו במהלך הזמן. חזרה משמעותית זו על נושא והרחבתו היא לצורך ביסוס הידע וגיבושו, ולצורך פיתוח הדרגתי של פרספקטיבה מתמטית רחבה על כלל הנושאים הנלמדים.
  לדוגמה: א) חשיפה הדרגתית למושג 'פונקציה' ולסוגיה השונים, ב) חשיפה הדרגתית לחשיבה דדוקטיבית בגאומטריה.

בהלימה לאמור לעיל, התוכנית מובאת לפי שכבות גיל, ותוך תיאור של שלושת מרכיביה העיקריים:

1. פירוט התכנים המתמטיים
2. פירוט הדגשים המתמטיים והדידקטיים בכל אחד מהתכנים
3. דוגמאות למטלות ולבעיות

הדגשים מצביעים באופן מפורש על הרעיונות העיקריים של כל נושא מתמטי, על הקשרים שניתן ורצוי לבנות עם נושאים אחרים ועל מידת ההעמקה המומלצת לטיפול בנושא, אשר באה לידי ביטוי גם במספר השעות המומלצות ללמידתו (כולל המלצות להעמקה עבור תלמידים מתקדמים במיוחד). הדוגמאות מובאות לצורך הדגמה בלבד, ומטרתן להראות אפשרויות של טיפול בדגשים בעזרת מטלות מסוימות. הדוגמאות אינן מחייבות, הן לא "פריטי מבחן" וכלל אינן ממצות - הן מוצעות כמקור השראה אפשרי לכותבי ספרי לימוד ולמורים.

תוכנית הלימודים מציעה להקדים נושאי לימוד לשכבות גיל באופן שונה ממה שהיה מקובל בעבר. לדוגמה: א) הנושא 'פונקציות' הוקדם לכיתה ז, ב) הנושא 'דמיון משולשים' הוקדם לכיתה ח.

הרציונל להקדמה זו נמצא במבוא לנושא הלימודי עצמו. כמו כן, בתוכנית נמצאים נושאים לימודיים אשר מקבלים דגש רב יותר מאשר בעבר.

לדוגמה: א) גאומטריה קדם דדוקטיבית,ב) יחס וקנה מידה.

הרציונל לכך נמצא גם הוא במבואות של הנושאים עצמם.

התוכנית מיועדת ל-150 שעות לימוד (לפחות) בכל שכבת גיל:

כיתה ז' – 68 שעות לתחום האלגברי, 30 שעות לתחום המספרי, ו-52 שעות לתחום הגאומטרי;

כיתה ח' – 58 שעות לתחום האלגברי, 54 שעות לתחום המספרי ו-38 שעות לתחום הגאומטרי;

כיתה ט' – 90 שעות לתחום האלגברי (כולל הסתברות) ו-60 שעות לתחום הגאומטרי.

כדי לסייע למורים בתכנון ההוראה, מובאות המלצות להקצאת שעות לימוד לכל נושא.

התוכנית מעודדת שימוש בכלי הוראה מגוונים על פי שיקול דעתם של כותבי ספרי הלימוד ומורים. אמצעים אלה יכולים לכלול המחשות שונות (קיפולי נייר, דגמים, תמונות ועוד). כמו כן, מומלץ מאוד לשקול את השימושים הייחודיים של הכלים הטכנולוגיים השונים, ולהתאים את עוצמתם הייחודית (חישובית, גרפית, תיעודית) להוראת כל נושא ונושא.

מתמטיקה - תוכנית הלימודים לכיתה ז'

הנחיות כלליות

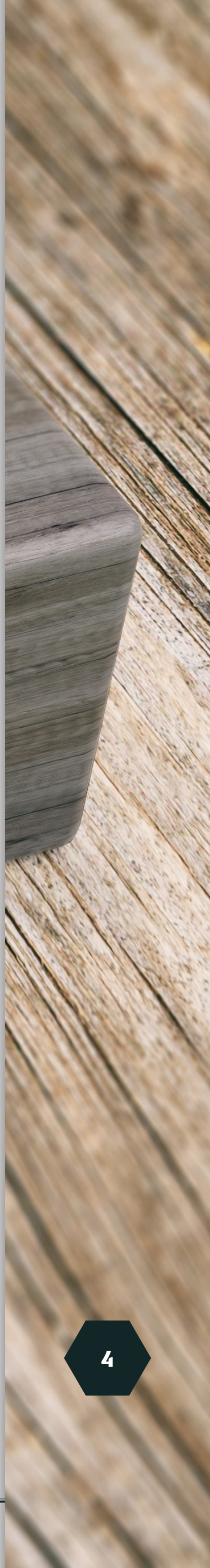
עקרונות:

1. על לימודי המתמטיקה בכיתה ז לשמר ולהעמיק את הידע שנלמד בבית הספר היסודי תוך לימוד תכנים חדשים, ולא במסגרת שיעורי חזרה.
2. כל נושא יכלול לימוד ופיתוח של רמות חשיבה שונות: ידע וזיהוי, חשיבה אלגוריתמית, חשיבה תהליכית (יישום בהקשרים מוכרים) וחיפוש פתוח. בפרט, יש לשלב בעיות אורייניות מתוך מציאות קרובה לתלמידים.
3. יש לשלב אמצעי המחשה, כדוגמת איורים, דגמים, גזירות וקיפולי נייר בכל תחומי הלימוד שבהם הדבר ניתן.

מבנה התוכנית:

1. תוכנית הלימודים מחולקת לשלושה תחומים: **מספרי, אלגברי וגאומטרי**. על שלושת התחומים להילמד תוך שילוב מושכל ביניהם.
2. הלימוד מבוסס על שלושה סבבים שכל אחד מהם מתבסס על הסבבים שקדמו לו. התחום האלגברי והתחום הגאומטרי נלמדים בכל שלושת הסבבים, ואילו התחום המספרי נלמד בשני הסבבים הראשונים.
3. לימודי האלגברה נפתחים ביצירת תשתית, שבמרכזה המושגים '**משתנה**' ו'**הביטוי האלגברי**'. **משוואות** נלמדות בשני סבבים, תוך שימת דגש על הבנת מושגי **המשוואה ופתרונה**. בשלב זה של הלימוד יילמדו דרכי פתרון המצריכות מיומנויות בסיסיות בלבד, כשהעמקה במיומנויות הטכניות נדחית לכיתה ח. בסבב השלישי נלמד המושג '**פונקציה**'.

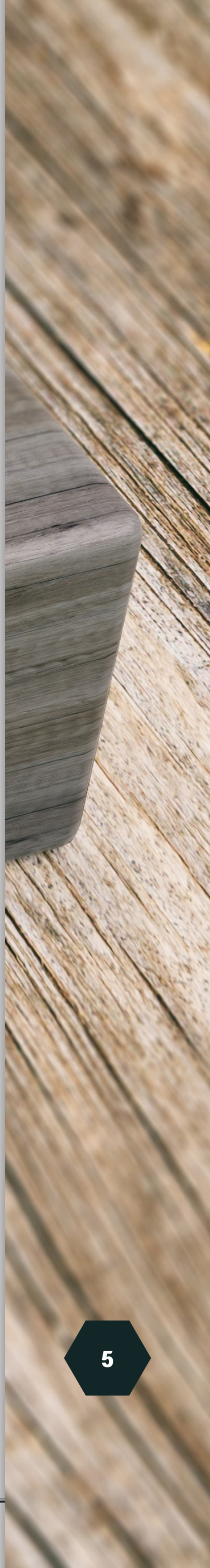
   יש לפתוח נושא זה בהיכרות עם מצבים מציאותיים שבהם טבעי להגדיר התאמות בין מספרים, ולשלב בהדרגה הגדרות וסימונים פורמליים.
4. **התחום המספרי** נפתח בחזרה על **חוקי החשבון**, המוכרים מבית הספר היסודי, ובהעמקה שלהם, תוך שימוש גם בכתיב אלגברי. הסבב השני מתמקד **במספרים מכוונים** ובפעולות חשבון במספרים מכוונים.
5. לימודי **הגאומטרייה** מתבססים על הנלמד בבי"ס היסודי. הדגש הוא על לימוד מוחשי המשלב בניות, מדידות וחישובים. בשלב ראשון יש לבסס את הלימוד על הנמקות שמקורן בהתנסויות מוחשיות. באופן הדרגתי יש להשתמש בעובדות שהתקבלו בדרך מוחשית לשם הנמקת טענות חדשות. מושגי השטח והנפח יוצגו באופן אינטואיטיבי, ויוקנו לתלמידים ע"י דוגמאות. לימודי הגאומטרייה בכיתות ז ו-ח יהיו בסיס שעליו יישענו לימודי הגאומטרייה הדדוקטיבית החל בכיתה ט.
6. משיקולים פדגוגיים יש מקומות שבהם התכנית מעדיפה תיאורים דידקטיים על פני הגדרות מתמטיות פורמליות.
7. בתוכנית תכנים נוספים המיועדים לתלמידים מתקדמים ומתעניינים (מופיע על רקע אפור).



סבב 1

תחום אלגברי	תחום מספרי	תחום גאומטרי
משתנים, ביטויים אלגבריים והכללה של תופעות מספריות (15 שעות)	**פעולות החשבון וחוקיהן, חזקות ושורשים ריבועיים** (10 שעות)	**מלבן, תיבה | ניצבות והקבלה** (15 שעות)

תחום אלגברי: 1. משתנים, ביטויים אלגבריים והכללה של תופעות מספריות (15 שעות)	
נושאי הלימוד	**דגשים ודוגמאות**
משתנים וביטויים אלגבריים	**משתנה: סימן שמייצג ערך מספרי וניתן לקביעה ולשינוי לפי הצורך.** **דגשים:** 1. בלימוד ראשוני יש להתמקד בייצוג ערכים מספריים באמצעות משתנים, ואין לפרט את השימושים השונים במשתנה, שהם: נעלם, קבוע, אמצעי לניסוח טענה כללית או פרמטר. 2. מוצע להציג את המושג 'משתנה' בדוגמאות שבהן רואים את התועלת שבו, למשל, תיאור מצבים חשבוניים והכללות של מקרים פרטיים (ניסוח חוקיות). 3. לתלמידים אין היכרות קודמת עם סימנים כמייצגים ערכים מספריים (למעט שימוש במשבצות), ויש להקדיש זמן להטמעת הייצוג. **ביטוי אלגברי: צירוף של מספרים ו/או משתנים הקשורים ביניהם בפעולות מתמטיות.** **דגשים:** 1. מספרים וביטויים חשבוניים הם מקרים פרטיים של ביטויים אלגבריים. ביטוי חשבוני הוא צירוף של מספרים הקשורים ביניהם בפעולות מתמטיות. כשביטוי אלגברי כולל משתנים, הצבת ערכים מספריים במקום המשתנים הופכת אותו לביטוי חשבוני בעל ערך מספרי. 2. מוצע להציג ביטויים אלגבריים גם דרך דוגמאות הממחישות את התועלת שבהם, כהמשך להצגת המושג 'משתנה'. 3. יש להתמקד ביישומים של ביטויים אלגבריים מבלי לעסוק בהגדרה פורמלית, ובזיהוי של ביטויים אלגבריים. **דוגמאות:** 1. א. מחיר ליטר דלק הוא 7 שקלים. מהי העלות של 20 ליטרים של דלק? של 30 ליטרים של דלק? מהי העלות של b ליטרים של דלק? מהי העלות כש- b = 40?



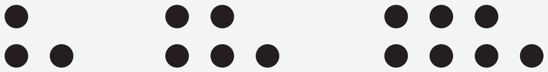
תחום אלגברי: 1. משתנים, ביטויים אלגבריים והכללה של תופעות מספריות (15 שעות)

משתנים וביטויים אלגבריים

ב. בלילה, בין השעות 21:00 ל–06:00 קיימת עמלה קבועה בת 2 שקלים עבור כל מילוי דלק.
מהי העלות של 20 ליטרים של דלק בלילה? של 30 ליטרים של דלק?
מהי העלות של b ליטרים של דלק בלילה?
מהי העלות כש- $b = 40$?

2. דוגמה לקישוריות עם גאומטרייה:
מהו היקפו של משולש שווה צלעות שאורך צלעו 5 ס"מ?
מהו היקפו של משולש שווה צלעות שאורך צלעו 7 ס"מ?
מהו היקפו של משולש שווה צלעות שאורך צלעו m ס"מ?

3. לפניכם שלושה איברים ראשונים (משמאל לימין) בסדרה של קבוצות סימנים:



1. כמה סימנים יש בכל אחד מהאיברים המוצגים?
2. הציעו המשך לסדרה: כתבו שלושה איברים עוקבים.
3. בהנחה ששש האיברים הראשונים של הסדרה הם 3, 5, 7, 9, 11, 13, מהו האיבר ה–9 בסדרה? דרך פתרון אפשרית היא להמשיך את הסדרה עד לקבלת 9 איברים.
4. מהו האיבר ה–58 בסדרה? מהו האיבר ה–1000 בסדרה?

מטרת השאלה היא לשכנע את התלמיד שיש צורך בדרך שיטתית למציאת איבר כלשהו בסדרה.

דרך מוצעת למציאת איבר כללי בסדרה היא:

(1) לראות שאפשרי להציג את שלושת האיברים הראשונים בסדרה כך: $2\cdot1+1$, $2\cdot2+1$, $2\cdot3+1$
(2) לבדוק שהתבנית נשמרת, ולהסיק מכך שהאיבר ה–9 הוא $9+1\cdot2$.
(3) להסיק את הערכים המספריים של האיברים ה–58 וה–1000.
(4) לנסח חוקיות זו באמצעות ביטוי אלגברי. האיבר במקום ה–n הוא: $n+1\cdot2$.

4. מהם חמשת האיברים הראשונים של הסדרה שבמקום ה–n שלה נמצא המספר $n-1\cdot3$?
מהם חמשת האיברים הראשונים של הסדרה שבמקום ה–n שלה נמצא המספר $\frac{2}{3}n$?

5. הציגו את החוקיות בסדרות הבאות באמצעות ביטויים אלגבריים:
3, 5, 7, ...
5, 8, 11, ...

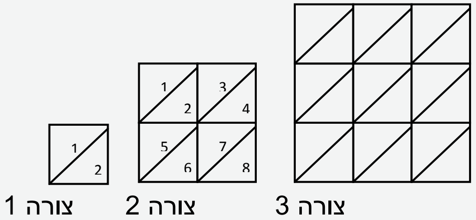
תחום אלגברי: 1. משתנים, ביטויים אלגבריים והכללה של תופעות מספריות (15 שעות)

משתנים וביטויים אלגבריים

6. הציגו את החוקיות בסדרות הבאות באמצעות ביטויים אלגבריים:

$$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots,\quad \frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\ldots,\quad \frac{2}{3},\frac{4}{4},\frac{6}{5},\frac{8}{6},\ldots.$$

7. הסדרה הבאה מיוצגת באיורים:



וממשיכה לפי אותה חוקיות.

השלימו את הטבלה הבאה:

הצורה	מספר המשולשים
1	2
2	8
3	
4	

כמה משולשים יהיו בצורה ה-7?

כמה משולשים יהיו בצורה ה-50? הסבירו כיצד ניתן לחשב את מספר המשולשים בצורה ה-50 ללא צורך בשרטוט הצורה.

הערות:

1. יש לשים לב שאופן הכתיבה המקובל של כפל מספר במשתנה, למשל 2x, עלול ליצור קושי אצל תלמידים. בשלבים הראשונים של הלימוד מומלץ לרשום את סימן הכפל באופן מפורש, למשל כך: $2\cdot x$.
2. יש לעסוק במגוון מצבים וסוגים שונים של חוקיות, ולשלב בהם גם שברים ותכנים גאומטריים.
3. יש לשים לב שמספר סופי של איברים בסדרה אינו קובע את המשכה באופן יחיד.

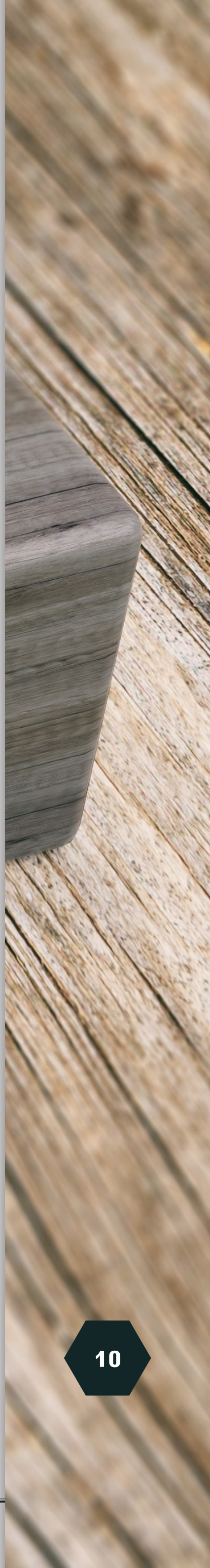
תחום אלגברי: 1. משתנים, ביטויים אלגבריים והכללה של תופעות מספריות (15 שעות)	

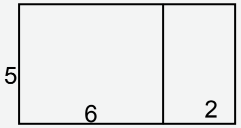
הצבת מספרים בביטויים אלגבריים, וחישוב ערכם המספרי של הביטויים החשבוניים המתקבלים	**כשמציבים מספר במשתנה, הביטוי האלגברי הופך לביטוי חשבוני בעל ערך מספרי.**
	דגשים:
	1. הצבת מספרים בביטויים אלגבריים תיעשה הן כתרגול לשמו והן בהקשר של שאלות מילוליות.
	2. יש לתרגל הצבת מספרים טבעיים, שברים פשוטים ומספרים עשרוניים.
	דוגמאות:
	1. הציבו בביטוי האלגברי $21-3\cdot a$ את הערכים 5, $5\frac{1}{5}$, 5.4, 5.7 במקומו של המשתנה a , וחשבו את ערכו המספרי של הביטוי בכל אחד מהמקרים.
	2.
	  1. מחיר ק"ג עגבניות בחנות הוא a שקלים ומחיר ק"ג מלפפונים הוא b שקלים.
	  כתבו ביטוי אלגברי המבטא את עלותם הכוללת של 3 ק"ג עגבניות ו-2 ק"ג מלפפונים בחנות זו.
	  2. מחיר ק"ג עגבניות בשוק נמוך ב- 2 שקלים ממחירו בחנות, ומחיר ק"ג מלפפונים הוא 3/4 ממחירו בחנות. כתבו ביטוי אלגברי המבטא את עלותם הכוללת של 3 ק"ג עגבניות ו-2 ק"ג מלפפונים בשוק.
	3. הציבו את המספרים ...1,2,3, במקום המשתנה a בביטוי: $4a+2-3a+1$.

שוויון בין ביטויים אלגבריים **כינוס איברים דומים**	**ביטויים אלגבריים שווים:** שני ביטויים אלגבריים נקראים 'שווים' אם לשניהם אותו ערך מספרי עבור כל הצבה אפשרית של מספרים. **דגשים:** 1. התלמידים ילמדו לזהות אם שני ביטויים אלגבריים שווים באמצעות חוקי החשבון הנלמדים בתחום המספרי (חוקי החילוף, חוקי הקיבוץ וחוק הפילוג). 2. חוקי החשבון מאפשרים להמיר ביטויים אלגבריים בביטויים אלגבריים ששווים להם אך פשוטים יותר. פישוט ביטויים אלגבריים יהיה בהמשך כלי לצורך פתרון משוואות. 3. בהקשר זה, יש לתרגל פעולות בשברים, ובפרט להציג את השקילות בין סימן החילוק ' : ' לבין קו השבר. 4. בשלב זה, מעברים בין ביטויים אלגבריים שווים יתורגלו רק בדוגמאות שבהם משתנה אחד בלבד. **דוגמאות:** 1. הביטוי $p + p + p$ שווה לביטוי $3\cdot p$ משיקולים אינטואיטיביים ומהגדרת הכפל. 2. הביטוי $2 - 2a + 7 + a$ שווה לביטוי $2 - 7 + 2a + a$ משיקולים אינטואיטיביים ושווה לביטוי $3a + 5$. לכינוס של כפולות שונות של אותו משתנה קוראים 'כינוס איברים דומים'. 3. הביטוי $\frac{2}{5}m$ שווה לביטוי $\frac{2m}{5}$. יש לבסס שוויון זה על אופן ביצוע הכפל של מספר בשבר. 4. השוויונות הבאים נובעים מההצגות השקולות של פעולת החילוק, ומחוק הפילוג: $(a+3):2=\frac{a+3}{2}=\frac{a}{2}+\frac{3}{2}$

תחום מספרי: 1. פעולות החשבון וחוקיהן, חזקות ושורשים ריבועיים (10 שעות)	
נושאי הלימוד	**דגשים ודוגמאות**
כללי פעולות החשבון	בבית הספר היסודי נלמדות פעולות החשבון וחוקיהן. הדגשים בפרק זה הם חזרה, ביסוס הבנת פעולות החשבון, הדגמת החוקים במצבים מוכרים ושימוש בהם לפתרון תרגילים. **דגשים:** 1. יש לבסס את הכרת סדר פעולות החשבון על תובנה מספרית. אין צורך בתרגילים ארוכים ואין צורך בריבוי סוגריים. 2. בביטוי שבו פעולות עוקבות של חיבור וחיסור, כל מחובר מייצג תוספת לביטוי הכולל (ללא תלות בשלב שבו הוא נוסף) וכל מחסר מייצג הפחתה מהביטוי הכולל (ללא תלות בשלב שבו הוא מופחת). לפיכך, כל שינוי בסדר המחוברים או המחסרים אינו משנה את ערך הביטוי הכולל. 3. מומלץ לשלב ביטויים אלגבריים עם התחום המספרי. 4. זה המקום לעסוק בביטויים אלגבריים שווים שבהם משנים את סדר המחוברים והמחוסרים. 5. יש לחזור על משמעות פעולת החילוק, ולהציג את קו השבר כשקול לפעולת חילוק. **דוגמאות:** 1. שינוי סדר המחוברים / מחוסרים מפשט את החישוב במקרים הבאים: $2.4 + 1.7 + 7.6 = 2.4 + 7.6 + 1.7 = 10 + 1.7 = 11.7$ $1.7 + 5.4 -3.4\ 5.4 = - 3.4 + 1.7 = 2 + 1.7 = 3.7$ $5.4 + 7.4 - 8 = 7.4 - 8 + 5.4$ 2. $2a + 3 + 3a + 4 = 2a + 3a + 3 + 4 = 5a + 7$ $5b + 4 - 2b - 3 = 5b - 2b + 4 - 3 = 3b + 1$ 3. $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ **פעולת החיבור מוגדרת כפעולה בין שני מחוברים (פעולה בינארית).** **חוק החילוף קובע ששינוי סדר המחוברים אינו משנה את הסכום. ניסוחו האלגברי של חוק החילוף הוא שלכל שני מספרים המיוצגים על ידי המשתנים a ו-b מתקיים:** $a + b = b + a$
חוקי החילוף והקיבוץ של פעולת החיבור	**חיבור של יותר משני מחוברים כרוך בסדרה של פעולות חיבור, שבכל אחת שני מחוברים. קיימת שרירותיות בסדר בחירת המחוברים.**

תחום מספרי: 1. פעולות החשבון וחוקיהן, חזקות ושורשים ריבועיים (10 שעות)	
חוקי החילוף והקיבוץ של פעולת החיבור	**חוק הקיבוץ קובע שהסכום אינו תלוי בסדר הסכימה. בניסוחו האלגברי, חוק הקיבוץ קובע שלכל שלושה מספרים המיוצגים על ידי המשתנים a, b ו-c מתקיימים:** $(a + b) + c = a + (b + c)$
חוקי החילוף והקיבוץ של פעולת הכפל	**כמו פעולת החיבור, גם פעולת הכפל מוגדרת כפעולה בין שני גורמים (פעולה בינארית). חוק החילוף קובע ששינוי סדר הגורמים אינו משנה את המכפלה. ניסוחו האלגברי של חוק החילוף הוא שלכל שני מספרים המיוצגים על ידי המשתנים a ו-b מתקיים:** $a \cdot b = b \cdot a$ **כפל של יותר משני גורמים כרוך בסדרה של פעולות כפל שבכל אחת שני גורמים.** **חוק הקיבוץ קובע שהמכפלה אינה תלויה בסדר המכפלות. בניסוחו האלגברי, חוק הקיבוץ קובע שלכל שלושה מספרים המיוצגים על ידי המשתנים a, b ו-c מתקיים:** $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ **שילובם של חוקי החילוף והקיבוץ מביא למסקנה שבביטוי שהוא מכפלה של כמה גורמים, כל שינוי בסדר הגורמים אינו משנה את המכפלה.** **דוגמאות:** 1. שינוי סדר הגורמים מפשט את החישוב במקרה הבא: $\frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 8 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 13 = 4 \cdot 13 = 52$ 2. $2x \cdot 3 = 2 \cdot x \cdot 3 = 2 \cdot 3 \cdot x = 6x$ **הערה:** בניגוד לחיבור ולכפל, אם משנים את הסדר בין שני המספרים בחיסור ובחילוק - מתקבלת, בדרך כלל, תוצאה שונה.
אי-חילוק באפס	**חילוק באפס אינו מוגדר.** יש להצדיק זאת על סמך הגדרת פעולת החילוק. בתוך כך ניתן לעשות שימוש בכתיב אלגברי. למשל, ערכו המספרי של הביטוי החשבוני 6:2 הוא מספר a המקיים $6 \cdot 2 = a$. באותו אופן, ערכו המספרי של הביטוי החשבוני 6:0 צריך להיות מספר a המקיים $6 \cdot 0 = a$. מכיוון שלא קיים מספר a המקיים תכונה זו, הביטוי 6:0 אינו מוגדר. יש מקום להסביר מדוע גם הביטוי החשבוני 0:0 אינו מוגדר.
איברים נייטרליים	**המספר 0 מקיים את התכונה שלכל מספר a: $a + 0 = 0 + a = a$** **לתכונה זו קוראים נייטרליות ביחס לחיבור.** **המספר 1 מקיים את התכונה שלכל מספר a: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$** **לתכונה זו קוראים נייטרליות ביחס לכפל.**



תחום מספרי: 1. פעולות החשבון וחוקיהן, חזקות ושורשים ריבועיים (10 שעות)	
מספרים הופכיים	**מספרים הופכיים: לכל מספר שונה מ-0 קיים מספר הופכי כך שמכפלתם של השניים שווה ל-1.** **דוגמאות:** 1. המספר ההופכי ל- 2 הוא ½. 2. המספר ההופכי ל- ½ הוא 2. 3. המספר ההופכי ל- $\frac{2}{3}$ הוא $\frac{3}{2}$. 4. גם למשתנה a קיים הופכי (כש- $a \neq 0$), והוא הביטוי האלגברי $\frac{1}{a}$. **הערה:** יש ללמד שחילוק במספר שקול לכפל במספר ההופכי לו, למשל: $2 : 3 = 2 \cdot \frac{1}{3}$.
חוק הפילוג	**חוק הפילוג מקשר בין פעולת הכפל (והחילוק) לבין פעולת החיבור (והחיסור). בניסוחו המקובל, חוק הפילוג קובע שלכל שלושה מספרים המיוצגים על ידי המשתנים a, b ו-c מתקיים: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$** **הערה:** מומלץ להדגים את חוק הפילוג על ידי דוגמאות. **דוגמה:** את שטחו של המלבן הבא ניתן לחשב בשני אופנים:  דרך א: $5 \cdot 6 + 5 \cdot 2$ דרך ב: $5 \cdot (6 + 2)$ משיקולים דומים מתקבל **חוק פילוג הכפל מעל לחיסור**, הקובע שלכל שלושה מספרים המיוצגים על ידי המשתנים a, b ו-c מתקיים: $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$ **דוגמה:** בפרדס יש 17 שורות של עצים. בכל שורה יש 18 עצים, מהם 2 עצי ברוש והשאר עצי לימון. כמה עצי לימון בפרדס? דרך א: $17 \cdot 18 - 17 \cdot 2$ דרך ב: $17 \cdot (18 - 2)$ **דגשים:** 1. חוק הפילוג חל על כל מספר של מחוברים. 2. שיטת החישוב הנפוצה לכפל מספר חד ספרתי בדו ספרתי (שנלמד כבר בבית הספר היסודי) הוא דוגמה לשימוש בחוק הפילוג בתחום המספרי.

תחום מספרי: 1. פעולות החשבון וחוקיהן, חזקות ושורשים ריבועיים (10 שעות)

חוק הפילוג

3. חוק פילוג הכפל מעל לחיסור מוכר לתלמידים מדוגמאות כגון: $998 \cdot 7 = (1000 - 2) \cdot 7 = 7000 - 14 = 6986$
4. יש ליישם את חוק הפילוג גם בביטויים אלגבריים.
5. חוק הפילוג מתקיים גם כשבסוגריים מופיעים יותר משני מחוברים / מחסרים. למשל: $5 \cdot 5 + 3 \cdot 5 - 7 \cdot 5 = (5 + 3 - 7) \cdot 5$
6. פעולת החילוק מקיימת חוק פילוג ביחס למחולק:

$$(b + c) : d = b : d + c : d$$

$$(b - c) : d = b : d - c : d$$

ניתן להסיק חוק זה ישירות מחוק הפילוג של הכפל, אם נציב במקום המשתנה a את הביטוי 1/d, ונשתמש בעובדה שכפל ב–1/d כמוהו כחילוק ב–d.

דוגמה לשילוב חוקי הפעולות שנלמדו עד כה עם ביטויים אלגבריים:

חברו בין הביטויים האלגבריים בטור א לבין הביטויים השווים להם בטור ב:

טור א	טור ב
$2a + 5$	$8a + 5$
$3a - a$	$\frac{1}{2} \cdot a$
$(a + 1)4$	$4a + 4$
$6a + 2a + 5$	$15a$
$3a \cdot 5$	$2a + 5$
$\frac{a}{2}$	$2a$

הכללים הבאים מוצגים באופן אלגברי, אבל הכוונה היא שילמדו את משמעותם של הכללים ואת דרך יישומם, ולא שיזכרו את הזהויות האלגבריות.

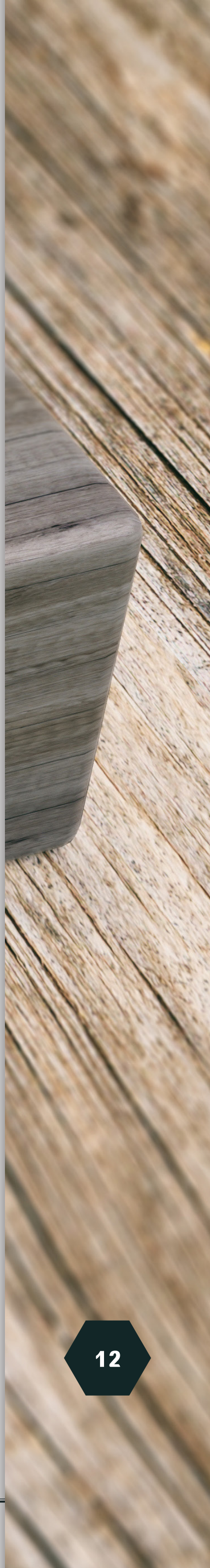
חיסור של סכום:

$a - (b + c) = a - b - c$

העיקרון: כשהמחסר גדל - ההפרש קטן באותו השיעור.

דוגמאות:

1. היקף משולש הוא 23.5 ס"מ. אורכה של אחת הצלעות הוא 7.8 ס"מ ואורכה של צלע אחרת הוא 11 ס"מ. מה אורכה של הצלע השלישית?
ניתן לפתור זאת בשתי דרכים:



תחום מספרי: 1. פעולות החשבון וחוקיהן, חזקות ושורשים ריבועיים (10 שעות)	
	א. למצוא את סכום אורכי הצלעות הידועות (11 + 7.8) ולחסרו מ-23.5. ב. לחסר מ-23.5 תחילה את 7.8 ואחר כך את 11. 2. היו לי a שקלים. קניתי שני מוצרים, האחד ב-b שקלים והאחר ב-c שקלים. כמה כסף נשאר לי? ניתן לפתור זאת בשתי דרכים: א. למצוא כמה כסף הוצאתי בסך הכול (c + b) ולחסר אותו מ- a, כלומר: $a - (b + c)$. ב. לחסר מ- a תחילה את b ולאחר מכן את c, כלומר: $a - b - c$.
חיסור של הפרש: $a - (b - c) = a - b + c$	**העיקרון: כשהמחסר קטן - ההפרש גדל באותו השיעור.** **דוגמה:** היו לי a שקלים. כשקניתי מוצר מסוים שילמתי b שקלים וקיבלתי עודף c שקלים. כמה כסף יש לי עכשיו? ניתן לפתור זאת בשתי דרכים: א. בסך הכל הוצאתי $(b - c)$ שקלים לכן נשארו לי $a - (b - c)$ שקלים. ב. לאחר התשלום, ולפני קבלת העודף, היו בידי $a - b$ שקלים. לאחר קבלת העודף היו לי $a - b + c$ שקלים.
הכפלת המחלק: $a : (b \cdot c) = (a : b) : c$	**העיקרון: כשכופלים את המחלק - המנה מחולקת באותו השיעור.** **דוגמה מילולית:** בגן החיות 4 כלובים, ובכל כלוב 5 קופים. מחלקים לקופים 60 בננות. כמה בננות יקבל כל קוף? ניתן לפתור זאת בשתי דרכים: 1. מחלקים תחילה את הבננות בין הכלובים, לכל כלוב 60:4=15 בננות. בכל כלוב, כל אחד מחמשת הקופים לוקח 15:5=3 בננות. מכאן שכל קוף מקבל: (60:4):5=3 בננות. 2. מחלקים את הבננות ישירות לקופים. מספר הקופים הוא 5·4 =20, ומכאן שכל קוף מקבל 3=60:20=(5·4):60 בננות.
	דוגמה אלגברית: הביטוי האלגברי $a : (2 \times 5)$ קטן פי 5 מהביטוי האלגברי $a : 2$ **ולכן** $a : (2 \times 5) = (a : 2) : 5$ הערה: יש לחזור ולהציג את החילוק גם בעזרת קו שבר. במקרה זה: $a : (b \cdot c) = \frac{a}{b \cdot c}$ $(a : b) : c = \frac{\frac{a}{b}}{c}$

תחום מספרי: 1. פעולות החשבון וחוקיהן, חזקות ושורשים ריבועיים (10 שעות)	
חילוק המחלק: $a : (b : c) = (a : b) \cdot c$	**העיקרון: כשמחלקים את המחלק - המנה מוכפלת באותו השיעור.** **דוגמה מילולית:** a ספרים חולקו ל-12 תלמידים המכינים עבודה בשלשות. כמה ספרים תקבל כל שלשת תלמידים? ניתן לפתור זאת בשתי דרכים: 1. מספר השלשות הוא $12:3$, ולכן כל שלשה תקבל $a:(12:3)$ ספרים. 2. כל תלמיד יקבל $a:12$ ספרים, ולכן כל שלשה של תלמידים תקבל $(a:12)\cdot 3$ ספרים. **דוגמה אלגברית:** הביטוי האלגברי $a:(12:3)$ גדול פי 3 מהביטוי האלגברי $(a:12)$. לכן, $a:(12:3) = (a:12)\cdot 3$ הערות: 1. יש לעסוק בתרגילים שבהם ניכרת התועלת של יישום כללים אלה. 2. שימוש נוסף בכללים אלה ייעשה מאוחר יותר, בלימוד פתרון משוואות.
חזקות עם מעריך טבעי	**אם a הוא מספר כלשהו, ו-n הוא מספר טבעי, אז $a^n = a\cdot a\cdot \ldots\ldots \cdot a$ כשהגורם החוזר a מופיע n פעמים.** **דגשים:** 1. יש ללמוד את המושג 'חזקה' ככתיב מקוצר של כפל חוזר. למשל: את המכפלה $4\cdot 4\cdot 4$ מסמנים: 4^3. 2. יש ללמוד שפעולת החזקה קודמת לכפל ולחילוק, וגם לחיבור וחיסור: $2\cdot 5^2=2\cdot 25=50$ ולעומת זאת $(2\cdot 5)^2=10^2=100$ וכן $2+5^2=2+25=27$ ולעומת זאת $(2+5)^2=7^2=49$ 3. יש להקנות לתלמידים תחושה מספרית למהירות הגידול או ההקטנה של כפל חוזר של מספר בעצמו. למשל: $2^2 = 4$, $2^5 = 32$, $2^{10} = 1024$, $2^{20} = 1048576$ וגם $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{1}{1024}$ 4. מומלץ להדגים את הגידול החזקתי במצבים אמיתיים (למשל: התפשטות מגפות). 5. ניתן ליישם את הכתיב החזקתי בכתיבת ביטויים עבור שטח ריבוע ונפח קובייה. 6. בפרק זה יש לעשות שימוש בסיסי בלבד בחזקות. החוקים האלגבריים של חזקות יילמדו בכיתה ט.

תחום מספרי: 1. פעולות החשבון וחוקיהן, חזקות ושורשים ריבועיים (10 שעות)	
חזקות עם מעריך טבעי	**דוגמאות:** 1. דוגמה לתהליך גידול חזקתי מופיעה באגדת 'המלך והאורז'. 2. $2^3=$___ 3. $2^2 \cdot 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$ 4. $a^3 \cdot a^2 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$ 5. $2b \cdot b^2 = 2 \cdot b \cdot b \cdot b = 2b^3$ בתרגילים ממין זה אין לעשות שימוש בחוקי חזקות פורמליים, אלא להתבסס ישירות על חוקי פעולות החשבון. 6. הצגת מספרים טבעיים כמכפלה של חזקות של מספרים ראשוניים, $32 \cdot 23 = 72$
שורש ריבועי	**שורש ריבועי: שורש ריבועי של מספר הוא מספר שאם מעלים אותו בריבוע מקבלים את אותו המספר.** **שורש ריבועי של המספר a הוא b אם $b^2 = a$** **דוגמה: ל-16 יש שני שורשים ריבועיים: 4 ו- 4-.** **הסימן $\sqrt{\ }$ מציין את השורש הריבועי החיובי של מספר.** **השורשים הריבועיים של 16 הם 4 ו- 4-, אבל $\sqrt{16} = 4$** **דגשים:** 1. בשלב זה יתורגלו רק חישובי שורשים ריבועיים שהם מספרים טבעיים, למשל $\sqrt{25} = 5$. 2. תלמידים מתקדמים יתרגלו גם שורשים של שברים פשוטים, למשל, $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$ או $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$. 3. נדרשת הכרת השורשים הריבועיים של מספרים שלמים ריבועיים עד 144, וכמו כן, של חזקות זוגיות של 10 כגון 10,000 ו–1,000,000 4. ניתן לחשב את אורך צלעה של קובייה שנפחה נתון. במקרה זה מדובר בשורש שלישי.

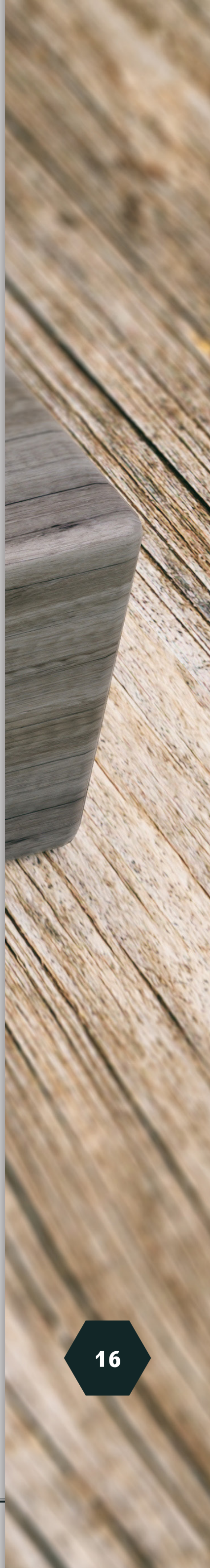
תחום גאומטרי: 1. מלבן, תיבה, ניצבות והקבלה (15 שעות)

הנחיות כלליות

לימוד הגאומטרייה בכיתות ז-ח מגשר בין לימוד הגאומטרייה בבית הספר היסודי לבין לימוד גאומטרייה דדוקטיבית החל בכיתה ט (ניתן לכנות את הגאומטרייה שנלמדת בכיתות ז-ח כ'קדם-דדוקטיבית'). מטרות הלימוד הן:

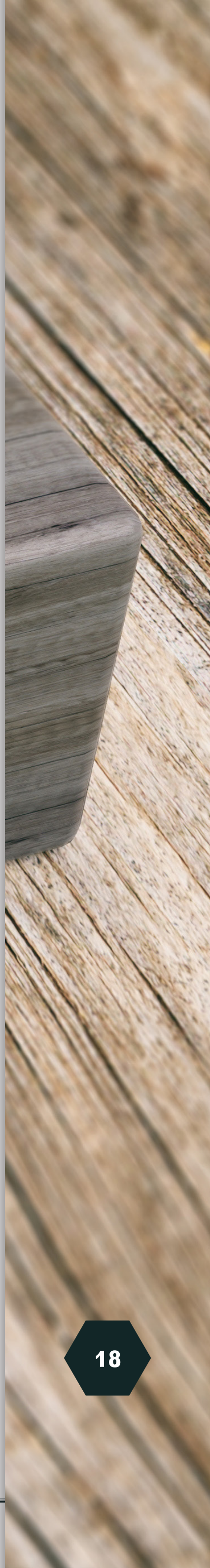
1. חשיפת התלמידים **למגוון מושגים ועובדות** שיילמדו מאוחר יותר במסגרת דדוקטיבית; בהקשר זה, חשוב שתישמר עקביות בין השלב הקדם-דדוקטיבי לבין השלב הדדוקטיבי.
2. לימוד תכנים גאומטריים באמצעות **התנסות מוחשית**, למשל, באמצעות בניות, שרטוטים וקיפולי נייר; בניות באמצעות סרגל (ללא שנתות) ומחוגה יילמדו החל בכיתה ט.
3. לימוד תכנים שימושיים, ובפרט **מדידות וחישובים** של אורך, שטח, נפח וזוויות; חשוב לקשר בין תכנים אלה לבין התחום האלגברי.
4. חשיפה ראשונית **לביסוס טיעונים** על נימוקים לוגיים; חשוב לציין כי אין הכוונה ללימוד ניסוח וכתיבת הוכחות פורמאליות, שכן יכולות אלה יפותחו בכיתה ט. שימוש בהנמקות ייעשה במידתיות, ובהתאם ליכולת התלמידים.
5. בחטיבת הביניים לומדים התלמידים לראשונה לסמן עצמים גאומטריים (למשל: קודקודים, קטעים, צלעות וזוויות) באמצעות **סימנים מקובלים**.

נושאי הלימוד	דגשים ודוגמאות
מלבן	**מלבן** הוא מרובע שלו ארבע זוויות ישרות. **דגשים:** 1. הבחירה לפתוח את לימוד הגאומטרייה בצורה מלבן נובעת מהיותו צורה מוכרת מבית הספר היסודי, ומהיותו בסיס טבעי ונוח לחישובי שטחים. 2. הגדרת המלבן מתבססת על המושג **זווית ישרה**, שאותו ניתן להבין באופן אינטואיטיבי (ראו להלן). 3. יש להכיר את המושגים **צלעות סמוכות, צלעות נגדיות, קודקודים סמוכים ואלכסון** (קטע המחבר בין שני קודקודים שאינם סמוכים).
ניצבות	**ישר (או קטע) ניצב לישר (או קטע) אחר אם הם נחתכים בזווית ישרה.** **דגשים:** 1. יש ללמוד לבנות זווית ישרה, למשל באמצעות קיפול נייר. 2. יש ללמוד לבנות ניצב לקטע מנקודה שעל הקטע ומנקודה שאינה על הקטע באמצעים כגון משולש שרטוט, או קיפולי נייר. 3. מרחק של נקודה מישר הוא אורכו של הניצב לישר מאותה נקודה. יש ללמוד למדוד מרחק של נקודה מישר על ידי בניית ניצב מתאים. 4. יש להתנסות במדידת אורכי קטעים המחברים נקודות על ישר לנקודה נתונה מחוץ לישר כדי להשתכנע שהניצב לישר הוא הקצר מביניהם.



תחום גאומטרי: 1. מלבן, תיבה, ניצבות והקבלה (15 שעות)	
ישרים מקבילים	**המושג 'הקבלה', לפיו שני ישרים הנמצאים באותו מישור נקראים מקבילים אם הם אינם נחתכים, מוכר לתלמידים מבית הספר היסודי.** **דגשים:** 1. שני **קטעים** נקראים מקבילים אם הם נמצאים על ישרים מקבילים. 2. ההגדרה המסורתית של הקבלה איננה נותנת כלים יישומיים לבדיקה האם שני קטעים נתונים מקבילים. הדרך הנוחה לבדוק אם שני קטעים הם מקבילים היא על ידי העלאת ניצב מאחד מהם. שני הקטעים מקבילים אם ניצב זה מאונך גם לקטע השני. 3. יחד עם זאת, כדאי לפתח זיהוי ויזואלי של אי-הקבלה, גם כשחיתוך הקטעים אינו נראה לעין, למשל:  כמו כן, יש לזהות הקבלה גם כשאורך הקטעים שונה, וגם במצבים הדדיים בין שלושה קווים מקבילים (או יותר) כאשר המרחק בין שני קווים אינו בהכרח שווה למרחק בין שניים אחרים (ראו איור)  4. יש ללמוד לשרטט קטע העובר דרך נקודה נתונה ומקביל לקטע נתון, באמצעות שתי זוויות ישרות. 5. בשני ישרים מקבילים, כל הנקודות על אחד הישרים נמצאות באותו המרחק מהישר האחר. ניתן, למשל, להיעזר בעקרון זה כדי להסביר מדוע פסי רכבת מקבילים למרות האשליה האופטית שהם נפגשים.
צורות חופפות	**שתי צורות נקראות 'חופפות' אם אפשר להניח אחת מהן על האחרת כך שתכסה אותה בדיוק (לשם כך ניתן להזיז, לסובב ולהפוך את הצורות).**
תכונות המלבן	**תכונות המלבן יילמדו באמצעות המחשה ותוך מתן נימוקים פשוטים.** **דגשים:** 1. צלעות סמוכות ניצבות זו לזו (נובע מההגדרה). 2. צלעות נגדיות מקבילות זו לזו (כי יש להן ניצב משותף). 3. צלעות נגדיות שוות באורכן (ניתן להראות זאת באמצעות קיפול מלבנים). 4. שני האלכסונים שווים באורכם וחוצים זה את זה (ניתן להראות זאת באמצעות קיפול מלבן שקוף). 5. מרובע שבו 3 זוויות ישרות הוא מלבן (אפשר להראות זאת באמצעות שרטוט). 6. מרובע שבו 3 זוויות ישרות ושתי צלעות סמוכות נתונות מגדיר מלבן מסוים (יש ללמוד לשרטט מלבן בהינתן שתי צלעות סמוכות).

תחום גאומטרי: 1. מלבן, תיבה, ניצבות והקבלה (15 שעות)	
ריבוע	**ריבוע הוא מלבן שכל צלעותיו שוות זו לזו.** **דגשים:** 1. חשוב להסביר את יחסי ההכלה: כל ריבוע הוא מלבן אבל לא כל מלבן הוא ריבוע. 2. יש לנמק את הטענה לפיה מלבן שלו שתי צלעות סמוכות שווה הוא ריבוע.
היקף ושטח מלבן **היקף מלבן**	**היקף של מצולע הוא סכום אורכי הצלעות שלו.** **דגשים:** 1. היקף של מלבן שווה לפעמיים סכום האורכים של צלעות סמוכות. 2. יש לעסוק בהיקף של מלבן באמצעים מספריים ואלגבריים. 3. יש ללמוד לעבור בין יחידות אורך שונות: מ"מ, ס"מ, מ' וק"מ. **דוגמאות:** 1. היקפו של מלבן הוא 36 ס"מ. צלע אחת במלבן ארוכה מהאחרת ב-4 ס"מ. מהן מידות המלבן? 2. מגרש הספורט בבית הספר הוא בצורת מלבן שמידותיו הן: 16.25 מ' X 15 מ'. המורה לחינוך גופני הטיל על התלמידים לרוץ חצי קילומטר. כמה פעמים עליהם להקיף את המגרש?
שטח מלבן	**שטח הוא מידה המתייחסת לגודלם של משטחים.** **דגשים:** 1. המושג 'שטח' מוכר לתלמידים מבית הספר היסודי, אולם עקרונותיו עדיין אינם מובנים לרבים מהם. 2. צורות חופפות שוות בשטחן, אבל צורות ששטחן שווה אינן בהכרח חופפות. 3. אם מרצפים צורה בעזרת צורות שאינן נחתכות, שטחה הוא סכום השטחים של הצורות המרצפות. 4. יחידת מידה של שטח היא צורה תקנית שבאמצעותה מרצפים צורות. יחידות המידה שבהן מקובל להשתמש הן ריבועים. שטחו של ריבוע שאורך צלעו 1 ס"מ נקרא **סנטימטר רבוע** (סמ"ר). 5. שטח מלבן יתקבל תחילה באמצעות ריצוף בריבועי יחידה, במקרים שבהם אורכי הצלעות הן כפולות שלמות של ס"מ. על סמך מדידה מוחשית זו תילמד **נוסחת שטח המלבן**. 6. בשלב שני, שטח המלבן יתקבל על ידי ריצוף במקרים שבהם אורכי הצלעות הן כפולות רציונאליות של ס"מ. יש לנמק את הרחבת נוסחת שטח המלבן גם למקרים אלה. 7. יש להרחיב את הטיפול גם למקרים שבהם ריבוע היחידה הוא **מטר רבוע** (מ"ר) **וקילומטר רבוע** (קמ"ר). כמו כן, יש להכיר את יחידת השטח דונם (1000 מ"ר).



תחום גאומטרי: 1. מלבן, תיבה, ניצבות והקבלה (15 שעות)

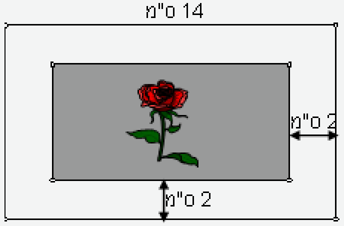
שטח מלבן

8. יש לדון בהשתנות שטח המלבן כתוצאה משינוי באורכי הצלעות, למשל, במקרים שבהם אורכו של זוג אחד של צלעות נגדיות מוכפל פי 2, או במקרים שבהם אורכי כל הצלעות מוכפלים פי 2.
9. יש ללמוד לעבור בין היחידות סמ"ר ומ"ר, ולנמק את המעברים באמצעות ריצוף.
10. יש להתנסות בבעיות שבהן מושגי ההיקף והשטח משולבים (ראה דוגמה 10 להלן).
11. יש לעסוק גם בשטחים שמורכבים ממלבנים.
12. יש לעסוק בשטח של מלבן באמצעים מספריים ואלגבריים.

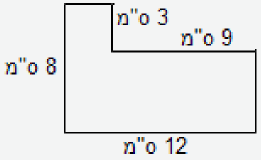
דוגמאות:

1. ציירו מלבן שצלע אחת שלו באורך של 2 ס"מ וצלע אחרת שלו באורך של 3 ס"מ. מהו היקף המלבן ומהו שטחו?
2. מדדו באמצעות סרגל את אורך הצלעות של מלבן משורטט, ומצאו את היקף המלבן ושטחו.
3. על סריג של נקודות משורטטים מספר מלבנים. קבעו אילו מלבנים בעלי שטח זהה, ואילו מלבנים בעלי היקף זהה.
4. מהו שטחו של מלבן שאורכי צלעותיו הם $\frac{1}{3}$ מ' ו- $\frac{1}{7}$ מ'? (הסבר: בריבוע ששטחו מ"ר ניתן לרצף 3x7 מלבנים כאלה, ומכאן ששטחו של מלבן אחד הוא $\frac{1}{21}$ מ"ר).
5. ממדי התמונה, כולל השוליים, הם 14 ס"מ X 10 ס"מ. התמונה והמסגרת מלבניים. רוחב השוליים מסביב לתמונה הוא 2 ס"מ. חשבו את השטח של התמונה.

(5)

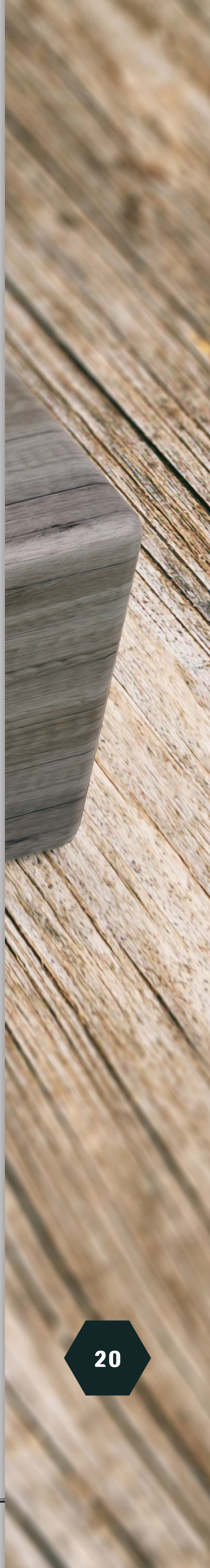


6. לפניכם צורה שמורכבת ממלבן וריבוע מחוברים. חשבו את השטח וההיקף של הצורה הבאה:



7. היקפו של מלבן הוא 36 ס"מ. צלע אחת שלו ארוכה ב-3 ס"מ מהצלע האחרת. מה שטח המלבן?
8. צלע אחת של מלבן ארוכה פי 3 מהצלע השנייה.
   א. כתבו ביטוי אלגברי המתאר את היקף המלבן.
   ב. כתבו ביטוי אלגברי המתאר את שטח המלבן.
9. צלע אחת של מלבן ארוכה ב- 3 ס"מ מהצלע השנייה.
   א. כתבו ביטוי אלגברי המתאר את היקף המלבן.
   ב. כתבו ביטוי אלגברי המתאר את שטח המלבן.
10. הגדילו צלע של ריבוע ב- 5 ס"מ והקטינו את הצלע האחרת ב- 5 ס"מ. כתוצאה מכך התקבל מלבן ששטחו 200 סמ"ר. מה היה השטח של הריבוע?

תחום גאומטרי: 1. מלבן, תיבה, ניצבות והקבלה (15 שעות)	
שטח מלבן	11. נתון מלבן שאורך צלעותיו 20 ס”מ ו- 40 ס”מ. הגדילו צלע אחת של המלבן ב- 10% והקטינו את הצלע האחרת ב- 10%. מבלי לפתור, שערו: האם שטח המלבן החדש גדול, קטן, או שווה לשטח המלבן המקורי? בדקו את השערתכם על ידי חישוב. 12. תנו דוגמה לשני מלבנים בעלי שטח שווה והיקף שונה. תנו דוגמה לשני מלבנים בעלי היקף שווה ושטח שונה. (בכיתות מתקדמות אפשר לתת את אותה השאלה בניסוח אלגברי.)
תיבה	**תיבה היא גוף המוגבל בשש פאות מלבניות. קובייה היא תיבה שכל פאותיה הן ריבועים.** **דגשים:** 1. התלמידים מכירים את התיבה מבית הספר היסודי. 2. יש להזכיר את המושגים: **קודקוד, פאה, מקצוע ושטח פנים**.
שטח פנים של תיבה	**שטח הפנים של תיבה הוא סכום שטחי הפאות שלה.** **דגשים:** 1. יש ללמוד לחשב את שטח הפנים של תיבה שממדיה נתונים באמצעים מספריים ואלגבריים. 2. יש לדון בהשתנות שטח פני התיבה כתוצאה משינויים חיבוריים וכפליים באורכי המקצועות, למשל במקרים שבהם אורכי כל המקצועות מוכפלים פי 2.
נפח של תיבה	**נפח של גוף הוא מידה המתייחסת למקום שהוא תופס במרחב.** **דגשים:** 1. יחידת מידה של נפח היא צורה תקנית שבאמצעותה ממלאים צורות תלת-ממדיות. יחידות המידה שבהן מקובל להשתמש הן קוביות. למשל, נפחה של קובייה שאורך צלעה 1 ס”מ נקרא סנטימטר מעוקב (סמ”ק). 2. נפח תיבה יתקבל תחילה משיקולי ריצוף בקוביות יחידה, במקרים שבהם אורכי המקצועות הן כפולות שלמות של ס”מ. על סמך שיקולים אלה תילמד נוסחת נפח התיבה. 3. בשלב שני, נפח התיבה יתקבל משיקולי ריצוף במקרים שבהם אורכי המקצועות הם כפולות רציונאליות של ס”מ. יש לנמק את הרחבת נוסחת נפח התיבה גם למקרים אלה. 4. יש להרחיב את הטיפול גם למקרים שבהם קוביית היחידה היא מטר מעוקב (מ”ק). כמו כן, יש להכיר את יחידת הנפח ליטר (1000 סמ”ק). 5. יש לדון בהשתנות נפח התיבה כתוצאה משינוי באורך המקצועות, למשל, במקרים שבהם אורכי כל המקצועות מוכפלים פי 2. 6. יש ללמוד לעבור בין היחידות סמ”ק, ליטר ומ”ק, ולנמק את המעברים משיקולי ריצוף. 7. יש לתת דוגמאות שבהן נפח אינו מודד רק כמות נוזלים (למשל, מדידת קיבולת של מקרר). כמו כן, רצוי להתנסות בדוגמאות מחיי היומיום (למשל, צריכה ביתית של מים וגירעון של משק המים) לפתח יכולת אומדן, ולהבין את סדרי הגודל ואת יחסי הגומלין בין מידות (למשל, קרטון של ליטר חלב מכיל 1000 קוביות של 1X1X1 ס”מ).



תחום גאומטרי: 1. מלבן, תיבה, ניצבות והקבלה (15 שעות)

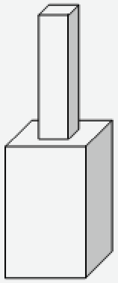
פריסה של תיבה

דגשים:

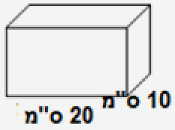
1. יש לדעת לשרטט פריסה של תיבה עבור תיבה נתונה.
2. יש לדעת כיצד נראית תיבה שפריסתה נתונה, ובכלל זה לזהות פאות נגדיות, לזהות פאות סמוכות, לזהות מקצועות מתלכדים ולזהות קודקודים מתלכדים.

דוגמאות:

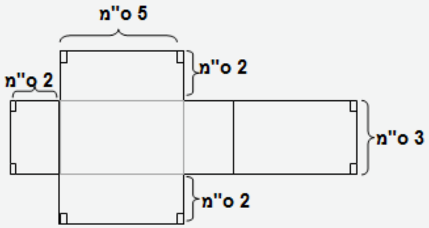
1. הגוף הבא מורכב משתי תיבות שבסיסן ריבוע, המונחות זו על גבי זו. הגובה של כל אחת משתי התיבות הוא 10 ס"מ. אורך מקצוע הבסיס של התיבה התחתונה הוא 6 ס"מ. אורך מקצוע הבסיס של התיבה העליונה הוא שליש מאורכו של מקצוע הבסיס של התיבה התחתונה.
   א. מצאו את הנפחים של שתי התיבות.
   ב. פי כמה גדול נפח התיבה התחתונה מנפח התיבה העליונה?
   ג. מצאו את נפח הגוף.
   ד. מצאו את שטח הפנים של הגוף.



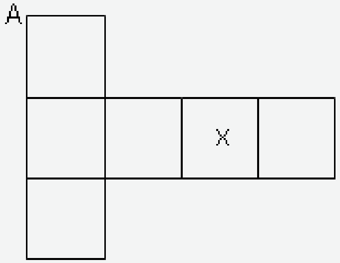
2. אריזת קרטון מכילה ליטר אחד של חלב (1000 סמ"ק).
   ברצוננו למזוג חלב משלוש אריזות קרטון לתוך מיכל שצורתו תיבה, כך שכמות החלב תמלא את התיבה עד שפתה. חלק ממידות התיבה רשומות על גבי השרטוט. מה גובה התיבה?



3. אם נקפל את הצורה הבאה נקבל תיבה.
   א. מהו נפח התיבה? ב. מהו שטח הפנים של התיבה?



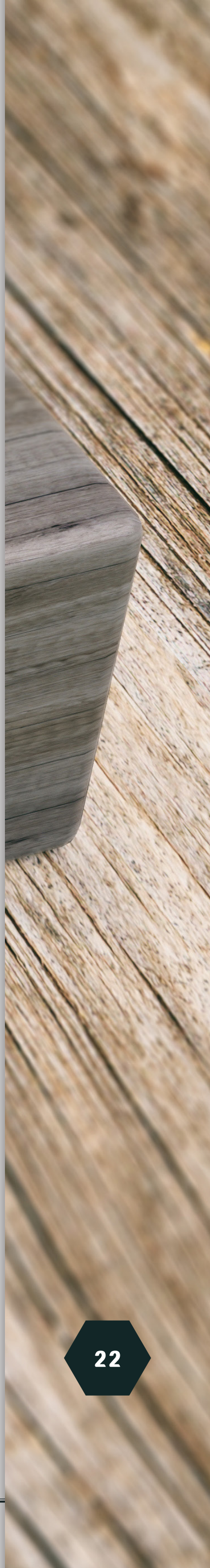
4. בפריסה של הקובייה הבאה:
   א. סמנו באות Y את הפאה הנגדית לפאה שמסומנת באות X.
   ב. סמנו באות Z את הפאות הסמוכות לפאה שמסומנת באות X.
   כמה פאות כאלה יש?
   ג. סמנו את הנקודות שמתלכדות עם הקודקוד A לאחר קיפול הקובייה.



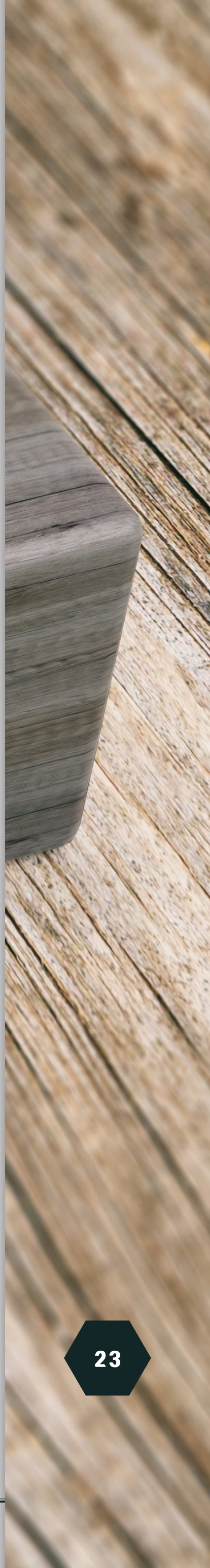
סבב 2

תחום אלגברי	תחום מספרי	תחום גאומטרי	
פתרון משוואות ושאלות מילוליות (15 שעות)	**מספרים שליליים, חיוביים ואפס** (20 שעות)	**שטחים** (12 שעות)	**זוויות** (15 שעות)

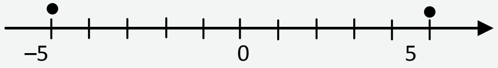
תחום אלגברי: 2. פתרון משוואות ושאלות מילוליות (15 שעות)	
נושאי הלימוד	**דגשים ודוגמאות**
משוואות ופתרונן	המטרה העיקרית היא להכיר לתלמידים את המושג **'משוואה'** ואת המשמעות של **פתרון משוואה**. **נעלם הוא סימן שמייצג ערך (או קבוצת ערכים) לא ידוע שמופיע בהקשר של משוואה או שאלה מילולית.** **משוואה בנויה משני ביטויים אלגבריים, שלפחות באחד מהם יש נעלם, ובין הביטויים יש סימן שוויון.** **פתרון של משוואה הוא המספר (או קבוצת המספרים) שהצבתו במקום הנעלם מביאה לשוויון מספרי בין שני אגפי המשוואה.** **דגשים:** 1. המשוואות בסבב זה תהיינה כאלה שבהן הנעלם מופיע רק באגף אחד. 2. משוואות הן הזדמנות לחזור על פעולות החשבון (תכונות וסדר). 3. המשוואות מבוססות על שאלות מילוליות (ראו פרוט בעמוד הבא), תוך הלימה בין מורכבות המשוואות למורכבות השאלות המילוליות. 4. בשלב ראשון, הפתרונות של המשוואות יהיו רק מספרים חיוביים ואפס. 5. יש ללמוד לזהות פתרונות נכונים מתוך פתרונות נתונים של משוואה. **דוגמאות:** 1. חשבתי על מספר, כפלתי אותו ב 2, חיסרתי 3, הוספתי שוב את המספר וקיבלתי 21. מהו המספר? א. סימון 'המספר שחשבתי עליו' ב- x. ב. כתיבת הפעולות שהתבצעו על x: $2x - 3 + x$ ג. רישום **המשוואה**: $3x - 3 = 21$ ד. מציאת פתרון המשוואה. 2. איזה מהמספרים הבאים: 1, 2, 3 הוא פתרון של המשוואה: $x^2 = x + 2$? 3. איזה מהמספרים הבאים: 2, 4, 6 הוא פתרון של המשוואה: $\frac{2x+3}{5} = 3$? 4. נתונה המשוואה $x^3 + x = ?$ מה צריך לכתוב במקום סימן השאלה כדי שפתרון המשוואה יהיה 1?



תחום אלגברי: 2. פתרון משוואות ושאלות מילוליות (15 שעות)	
פתרון משוואות ממעלה ראשונה בנעלם אחד	בפרק זה ייפתרו משוואות שלאחר כינוס איברים דומים הן יהיו מהצורה: **$ax + b = c$** **דגשים:** 1. המשוואות ניתנות לפתרון משיקולים מספריים, אך הכוונה היא לנצל נושא זה להיכרות ראשונה עם שיטות אלגבריות לפתרון משוואות. יש לאפשר דרכי פתרון מגוונות (שיקולים מספריים וטכניקה אלגברית). 2. יש לשלב בפתרון משוואות פעולות בביטויים אלגבריים על סמך חוקי הפעולות, ולהסביר שביצוע פעולה על שני אגפי המשוואה שומר על האיזון ביניהם. 3. יש לבדוק אם מספר המוצע כפתרון הוא אכן פתרון על ידי הצבתו במשוואה. 4. יש לשלב בפתרון משוואות גם שברים. **דוגמאות:** פתרו את המשוואות הבאות: 1. $3x - 5 = 11$ 2. $\frac{x+1}{3} = 7$ 3. $x + \frac{1}{3}x = 5$ 4. $x + 6 + 2x - 4 = 8$ 5. $x + 5) = 18)2$ 6. $3x - (x + 5) = 15$ **הערות:** 1. בפתרון משוואות מהצורה $ax = c$ יש להציג את האפשרות של חילוק במקדם של x, ובנוסף גם את האפשרות של כפל במספר ההופכי לו. 2. עם הצגת המספרים השליליים, יש להוסיף גם משוואות שפתרונן שלילי, או שהדרך לקבלת הפתרון מחייבת פעולות במספרים שליליים. 3. עיסוק רחב יותר בפתרון משוואות יתקיים בסבב השלישי ובכיתה ח.



תחום אלגברי: 2. פתרון משוואות ושאלות מילוליות (15 שעות)	
שאלות מילוליות שניתנות לפתרון באמצעות משוואות ממעלה ראשונה בנעלם אחד	בפרק זה יילמד פתרון שאלות מילוליות, ולשם כך יש: • **לייצג את הנתון הלא-ידוע בנעלם**, ולייצג נתונים נוספים בביטויים אלגבריים. • **לקבל משוואה** שבאמצעותה ניתן לפתור את השאלה. **דגשים:** 1. יש לשלב את פתרון המשוואות עם שאלות מילוליות העוסקות במגוון תכנים ומבנים מתמטיים. 2. כשמתקבל פתרון של משוואה הנובעת משאלה מילולית, יש לבדוק האם הפתרון מתאים לשאלה עצמה ולא להסתפק בהצבתו במשוואה. 3. ניתן לקבל פתרון לשאלות גם באמצעות שיקולים מספריים, אבל במקרה זה יש להראות לתלמידים גם דרך פתרון אלגברית. **דוגמאות:** 1. בכיתה 26 תלמידים. מספר הבנות קטן ב-4 ממספר הבנים. כמה בנות בכיתה? כמה בנים? 2. נתונות שתי משקולות. האחת כבדה פי 2 מהאחרת. משקלן הכולל הוא $13\frac{1}{2}$ ק"ג. מה משקל המשקולת הקלה? 3. במשולש ישר זווית, זווית חדה אחת קטנה ב- $20°$ מהזווית החדה האחרת. מצאו את גודל הזוויות. (שאלה זו מתאימה אם הרקע הגאומטרי הדרוש כבר נלמד). 4. 25% מתלמידי כיתה ז משתתפים בחוג מחשבים, $\frac{1}{3}$ מהתלמידים משתתפים בחוג אמנות ו-15 התלמידים הנותרים משתתפים בחוגי ספורט. כמה תלמידים בכיתה?

תחום מספרי: 2. מספרים שליליים, חיוביים ואפס (20 שעות)	
נושאי הלימוד	**דגשים ודוגמאות**
הצגת מספרים שליליים על ציר המספרים, סדר על ציר המספרים, מספרים נגדיים.	**היכרות עם מספרים שליליים: שלמים, שברים פשוטים ומספרים עשרוניים.** **מספרים שליליים הם קבוצת מספרים המרחיבה את עולם המספרים המוכר מבית הספר היסודי (המספרים החיוביים ואפס). לכל מספר חיובי מתאים מספר שלילי יחיד, כך שסכומם של השניים אפס. שני מספרים אלה נקראים נגדיים זה לזה.** **מספר נגדי מסומן ב (-). המספר הנגדי ל-5 מסומן ב: (-5) והמספר הנגדי ל- -5)) מסומן ב: -(-5) והוא שווה ל-5.** **המספרים השליליים ממוקמים משמאל לאפס על ציר המספרים, כך שכל שני מספרים נגדיים נמצאים באותו מרחק מהאפס.**  **מיקום המספרים על הציר משקף את יחס הסדר ביניהם. כל מספר שלילי קטן מכל מספר חיובי. כמו כן, -8 > -5, לדוגמה.**

תחום מספרי: 2. מספרים שליליים, חיוביים ואפס (20 שעות)	
הצגת מספרים שליליים על ציר המספרים, סדר על ציר המספרים, מספרים נגדיים.	**דגשים:** 1. המושג 'ישר המספרים', שהיה נהוג בבית הספר היסודי, יוחלף במושג '**ציר המספרים**' בגלל המעבר שייעשה מאוחר יותר למערכת צירים. 2. מקובל לכנות את המספרים הטבעיים (חיוביים שלמים), האפס והשליליים השלמים בשם אחיד: **מספרים שלמים**. כמו כן, מקובל לכנות את המספרים החיוביים והשליליים בשם אחיד: **מספרים מכוונים**. מספר מכוון הוא מספר שלו גודל וכיוון. 3. יש לצאת מדוגמאות מוכרות: מעלית, טמפרטורה מעל ומתחת ל-0 וגובה מעל ומתחת לפני הים. 4. מטעמים דידקטיים, כדאי להקיף את המספרים השליליים בסוגריים. בשלבים מאוחרים יותר של הלימוד משמיטים את הסוגריים. 5. 0 נגדי לעצמו, והוא היחיד בעל תכונה זו. 6. הסימן - (מינוס) מייצג שתי פעולות שונות: 1. פעולת החיסור בין שני איברים 2. פעולת הנגדי.
ארבע פעולות חשבון במספרים מכוונים	**הרחבת עולם המספרים שומרת על תכונות ארבע פעולות החשבון.** **דגשים:** 1. לימוד פעולות ה**חיבור** וה**חיסור** במספרים מכוונים יוכל להיעזר במודלים כגון: תנועות על ציר המספרים או רווח והפסד. 2. לימוד פעולת ה**כפל** יכול להיעזר במודלים של תנועה על ציר המספרים בכפל של מספר חיובי במספר שלילי, שימוש ב**חוק החילוף** בכפל של מספר שלילי במספר חיובי ושימוש ב**חוק הפילוג** בכפל של מספר שלילי במספר שלילי. 3. כללי ה**חילוק** נגזרים מהכללים המקבילים בכפל. 4. יש ליישם את המוסכמות בדבר סדר פעולות החשבון עבור מספרים מכוונים בתרגילים שבהם יותר מפעולה אחת. **דוגמאות:** 1. פתרו את התרגילים וסמנו את התוצאות על ציר המספרים: $5-(-2\ )=$ $5-2=$ $5+(-2)=$ $5+2=$ $(4-)\cdot 3=$ $(-6):(-3)=$ $(-\frac{1}{2})\cdot\frac{1}{4}=$ 2. פתרו: $2(-3+5)-4(4-9)=$ 3. מצאו את הממוצע של המספרים: 2.4 ,-3.1 ,-4 , 5.5, -12.7. 4. נתונה רשימת המספרים: $\frac{1}{0}$, -0 , $-\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}$, -5 1. לכל מספר ברשימה, חברו שני תרגילי חיבור שונים שהמספר הנתון הוא תוצאתם. הקפידו שאחד המחוברים יהיה שלילי. 2. לכל מספר ברשימה, חברו שני תרגילי כפל (חילוק) שונים שהמספר הנתון הוא תוצאתם. 3. לאילו מספרים מהרשימה ניתן להתאים תרגיל חיבור שבו שני המחוברים הם מספרים שליליים? הסבירו. 4. לאילו מספרים מהרשימה ניתן להתאים תרגיל כפל שבו שני הגורמים הם מספרים שליליים? הסבירו.

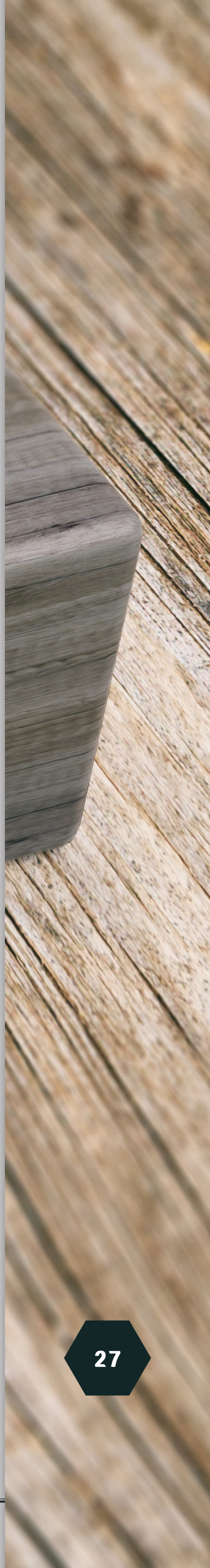
תחום מספרי: 2. מספרים שליליים, חיוביים ואפס (20 שעות)	
ארבע פעולות חשבון במספרים מכוונים	5. ניתן לדון בסדרות כדוגמת: $-3, -1, 1, 3, 5$ ניתן גם לדון בסדרות מהצורה: an, כש- a שלילי. 6. מצאו את האיברים הראשונים של הסדרות שאיבריהן הכלליים הם: $(-1)^n + 3n$ ו- $(-1)^n + \frac{1}{2}n$.
שילוב התחום האלגברי בלימוד מספרים מכוונים	**דגשים:** 1. יש לפתור משוואות שפתרונן מספר שלילי, או שבמהלך פתרונן יש צורך בפעולות במספרים מכוונים. 2. יש לעסוק במושג 'הנגדי': a- הוא הנגדי ל a בין אם a חיובי ובין אם הוא שלילי, וכמו כן: a נגדי ל a-. יש להדגיש כי a- יכול לציין מספר חיובי. **דוגמאות:** 1. פתרו את המשוואה: $-2x = -8$ 2. נמקו את הכלל $-(-a) = a$ 3. נמקו את הכללים: $-(a + b) = (-a) + (-b)$, $-(a - b) = -a + b$ $a - b = -1(b - a)$
חזקות עם מעריך טבעי ובסיס החזקה שהוא מספר מכוון	**דגשים:** 1. לפי המוסכמות של סדר פעולות החשבון, פעולת החזקה קודמת לפעולות אחרות. 2. יש להבחין בין הביטויים $(-3)^2$ לבין -3^2: $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$, $-3^2 = -(3 \cdot 3) = -9$, 9− = (3 · 3)− = 32− ,9 = (−3) · (3−) = 2(−3) **דוגמה:** חשבו את הביטויים הבאים: א. 32 − 10 ב. 3(3−) − 3 ג. $9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$ ד. 133 + 125 : (5−) − (16 − 23)

תחום מספרי: 2. מספרים שליליים, חיוביים ואפס (20 שעות)

מערכת צירים, סימון נקודות וקריאת נקודות	**מערכת צירים היא שני צירי מספרים שמאונכים זה לזה.** **דגשים:** 1. מערכת צירים משמשת גם לסימון נקודות לצורך **התמצאות במישור**, למשל בקריאת מפה. 2. מערכת צירים משמשת לסימון זוגות של ערכים כדי **לייצג פונקציות** באמצעות גרף (ראו בהמשך התוכנית). 3. יש לתרגל הן **סימון** של נקודות ששיעורן נתון והן **מציאת שיעורים** של נקודות נתונות. 4. מערכת צירים משמשת גם לסימון נקודות כדי **לייצג עצמים גאומטריים** באמצעים מספריים. יש לקשר בין מערכת צירים לבין עצמים גאומטריים שנלמדו עד כה. 5. את הציר האופקי נכנה **ציר x** ואת הציר האנכי נכנה **ציר y**, ללא תלות בגדלים ששני צירים אלה מייצגים. 6. כשמשתמשים במערכת צירים לצורך ייצוג עצמים גאומטריים חשוב ששני הצירים יהיו לפי **אותו קנה מידה**. **דוגמאות:** 1. שרטטו על מערכת צירים מלבן שצלעו האחת באורך 3 יחידות, הצלע הסמוכה לה באורך 5 יחידות, ואחד מקודקודיו נמצא בנקודה $(-2, 4)$. מצאו את השיעורים של שאר קודקודי המלבן. כמה מלבנים שונים שעונים על הדרישות הללו ניתן לשרטט? 2. שרטטו על מערכת הצירים משולש שקודקודיו הם: $A(-3, 1), B(-7,-2), C(2,-2)$. הורידו מהנקודה A גובה לצלע BC וסמנו את נקודת החיתוך ב-D. מהם שיעורי הנקודה D, מהו האורך של הגובה AD ומהו שטח המשולש ABC?

תחום גאומטרי: 2. שטחים (12 שעות) זוויות (15 שעות)

נושאי הלימוד	דגשים ודוגמאות
שטחים של מצולעים	מטרת הפרק היא ללמוד לחשב ולהשוות את שטחם של מצולעים שונים באמצעים הבאים: 1. **חישובים אריתמטיים** על סמך מידות נתונות; 2. **חישובים אלגבריים** (כשהנתונים הם משתנים); 3. עקרונות של **השוואה בין שטחים**. נקודות המוצא הן: 1. המשמעות של מדידת שטח (מציאת מספר ריבועי יחידה המוכלים בצורה); 2. חישוב שטח המלבן כפי שנלמד בסבב 1. כשהמצולע אינו מלבן אי אפשר לרצף אותו בריבועים, ולכן אנחנו נדרשים לשיטות אחרות לחישוב שטחים.



תחום גאומטרי: 2. שטחים (12 שעות) זוויות (15 שעות)

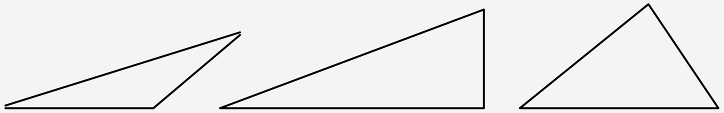
משולשים

דגשים:

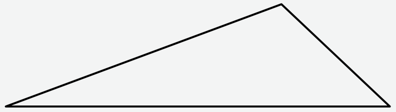
1. יש להראות באמצעים מוחשיים שניתן להרכיב מלבן משני משולשים ישרי זווית חופפים, ושניצבי המשולשים יוצרים את צלעות המלבן. תלמידים מכירים את המשולש ישר הזווית מבית הספר היסודי, אך יש להזכיר את המונחים **ניצבים** ו**יתר**.
2. נובע מכאן ששטחו של משולש ישר זווית שווה למחצית של השטח של המלבן ששני משולשים כאלה יוצרים. אם אורכי הניצבים הם a ו-b, אז שטח המלבן שווה ל-ab, ומכאן ששטח המשולש הוא: $\frac{1}{2}ab$ או $\frac{ab}{2}$
3. יש לתרגל את חישוב שטחו של משולש ישר זווית הן באופן מספרי והן באופן אלגברי, כולל המרה של יחידות מידה.
4. שטחו של משולש כללי מתקבל על ידי חלוקתו לשני משולשים ישרי זווית. לשם כך מורידים ניצב מאחד הקודקודים אל הצלע הנגדית. ניצב זה מכונה גובה, מושג המוכר לתלמידים מבית הספר היסודי. שטח המשולש מתקבל מחיבור השטחים של שני המשולשים ישרי הזווית.
5. אורכו של גובה לצלע שווה למרחק שבין הקודקוד הנגדי שמול הצלע לבין הישר המכיל את הצלע. מושג זה מתקשר למרחק שבין נקודה לישר, שנלמד בסבב 1.
6. במשולש קהה זווית הגובה יכול להיות חיצוני למשולש. במקרה זה, שטח המשולש מתקבל **כהפרש** שטחם של שני משולשים ישרי זווית.
7. חישוב שטחו של משולש כללי ייעשה באמצעות שרטוט גובה, מדידת אורכו ואורך הצלע הניצבת לו וחישוב מחצית המכפלה בין שני האורכים.
8. יש לציין את העובדה שכל אחת משלוש צלעות המשולש יכולה לשמש כתשתית לחישוב שטח המשולש.

דוגמאות:

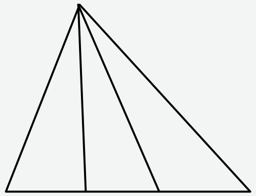
1. נתונים שלושה משולשים. בכל משולש שרטטו את שלושת הגבהים.

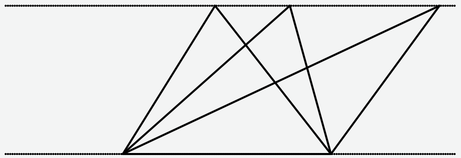
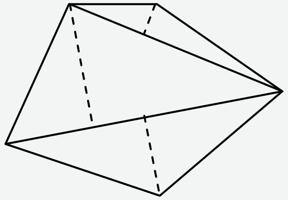


2. נתון המשולש הבא, חשבו את שטחו באמצעות סרגל ומשולש שרטוט ישר זווית.



3. נתון משולש שבו חילקו את הצלע התחתונה לשלושה קטעים שווין, כך שנוצרו שלושה משולשים. הסבירו מדוע שלושת המשולשים שווי שטח.



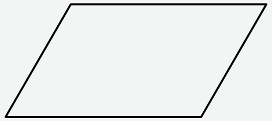
תחום גאומטרי: 2. שטחים (12 שעות) זוויות (15 שעות)	
משולשים	4. נתון משולש ישר זווית שאור הניצבים שלו 2 מטר ו-x מטר. מהו שטחו ביחידות של מ”ר? מהו שטחו ביחידות של סמ”ר? 5. באיור הבא משורטטים שני ישרים מקבילים וביניהם שלושה משולשים. לאיזה מהם השטח הגדול ביותר?  6. א. המחומש שבאיור חולק לשלושה משולשים , ובכל משולש נבחרה צלע ושורטט הגובה אל צלע זאת. מדדו את הצלעות המתאימות ואת הגבהים, חשבו את שטחי המשולשים ומצאו את שטחו הכללי של המחומש.  ב. חלקו את המחומש למשולשים בדרך אחרת, שרטטו גבהים, מדדו וחשבו שנית את השטח. **הערה:** ניתן לחשב גם את היקפו של משולש אם נתונים אורכי שלוש הצלעות שלו. בכיתה ח התלמידים ילמדו גם לחשב היקף של משולש ישר זווית תוך שימוש במשפט פיתגורס.
מקביליות	**דגשים:** 1. התלמידים מכירים את המקבילית מבית הספר היסודי: מרובע שבו כל זוג צלעות נגדיות מקבילות זו לזו. כל מלבן הוא מקבילית. 2. המרחק שבין שתי צלעות נגדיות נקרא **גובה**. למקבילית שני גבהים, שכל אחד מהם הוא המרחק שבין זוג צלעות נגדיות. 3. יש ללמוד באמצעים מוחשיים של פירוק והרכבה כיצד למצוא את שטח המקבילית באמצעות שטחו של מלבן מתאים. משיקולים אלה מתקבל שטח המקבילית כמכפלת אורך צלע בגובה המתאים. 4. יש לעסוק בשטחה של מקבילית באמצעים מספריים ואלגבריים.

תחום גאומטרי: 2. שטחים (12 שעות) זוויות (15 שעות)

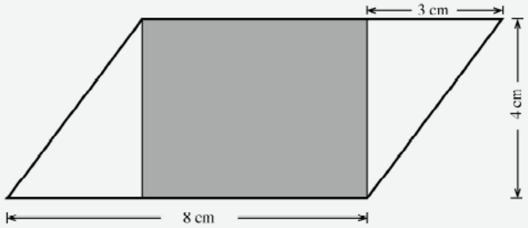
מקביליות

דוגמאות:

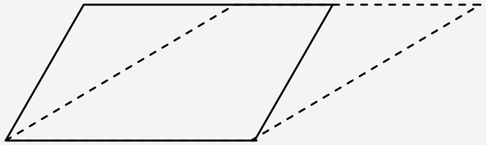
1. שרטטו את שני הגבהים של המקבילית הבאה:



2. האיור הבא מציג מלבן (צבוע אפור) שמוכל במקבילית. בהסתמך על המידות הנתונות, מהו שטחו של המלבן?



3. באיור הבא מוצגות שתי מקביליות. הסבירו מדוע שטחן שווה.



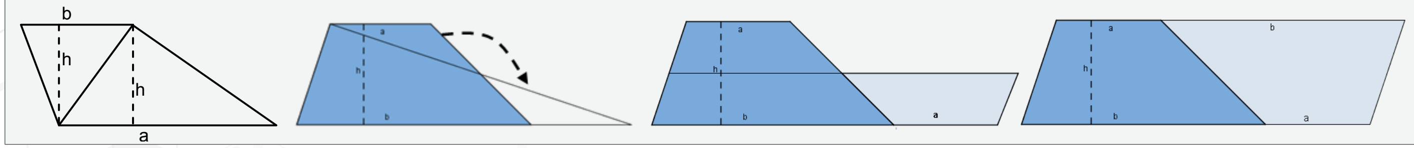
טרפזים

דגשים:

1. התלמידים מכירים את הטרפז מבית הספר היסודי: מרובע שבו זוג צלעות נגדיות מקבילות זו לזו. הצלעות המקבילות מכונות **בסיסי הטרפז. גובה של טרפז** הוא המרחק בין בסיסיו.
2. יש ללמוד באמצעים מוחשיים של פירוק והרכבה אופנים שונים למציאת שטח טרפז: מחצית המכפלה של סכום אורכי הבסיסים באורכו של הגובה.

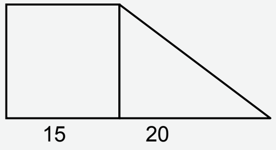
דוגמאות:

1. חישוב שטח הטרפז בארבע צורות:

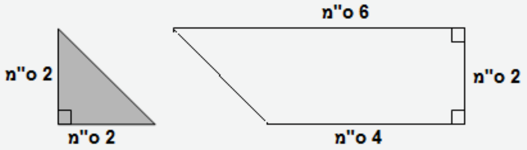


תחום גאומטרי: 2. שטחים (12 שעות) זוויות (15 שעות)

2. הטרפז שבשרטוט מחולק למלבן ולמשולש. למי משניהם שטח גדול יותר?



3. כמה משולשים החופפים למשולש האפור נחוצים כדי לרצף את הטרפז הנתון? מהו שטח המשולש, ומהו שטח הטרפז?



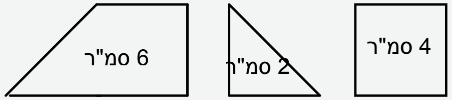
מצולעים כלליים

דגשים:

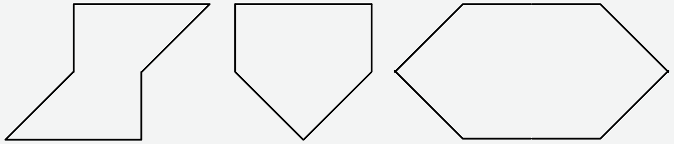
1. יש ללמוד לחשב את שטחו של מצולע על ידי חלוקתו למצולעים שאת שטחם אנחנו יודעים לחשב.
2. כל מצולע ניתן לחלוקה למשולשים.
3. לעתים הדרך הנוחה לחישוב שטח מצולע היא באמצעות חיסור חלקים מצורה שמכילה את המצולע.

דוגמאות:

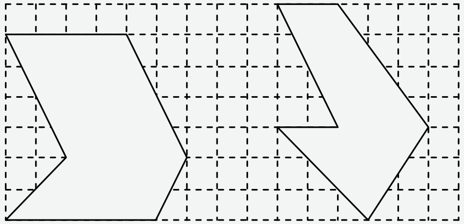
1. נתונות הצורות הבאות ושטחן.



היעזרו בצורות הנתונות וחשבו את השטח של הצורות הבאות:



2. חשבו את השטח של הצורות הבאות.
יחידת המידה היא משבצת:



תחום גאומטרי: 2. שטחים (12 שעות) זוויות (15 שעות)

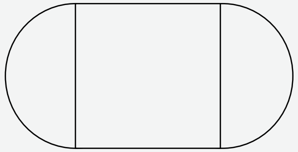
היקף מעגל ושטח עיגול

דגשים:

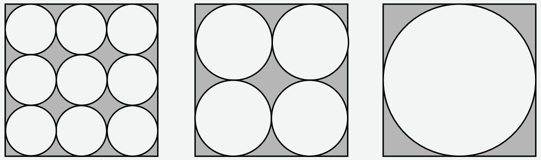
1. התלמידים מכירים את המעגל והעיגול מבית הספר היסודי. יש להזכיר את המושגים מרכז המעגל, רדיוס וקוטר.
2. יש למדוד את היקפם של כמה מעגלים ולאמת באופן ניסיוני את העובדה שקיים יחס קבוע בין היקף מעגל לבין קוטרו. הערה: ככל שקוטר המעגל גדול יותר, כך שגיאת המדידה קטנה יותר באופן יחסי.
3. יש ללמוד שהיחס בין היקפו של מעגל לבין קוטרו הוא מספר שגדול במעט מ-3. חשוב להדגיש שמספר זה הוא רק קירוב, ושמקובל לסמנו באות היוונית π.
4. יש ללמוד את הביטויים האלגבריים להיקף מעגל באמצעות הרדיוס והקוטר.
5. בהינתן הביטוי להיקף המעגל, יש להדגים לתלמידים באמצעים מוחשיים ששטחו של עיגול שווה למכפלה של π בריבועו של הרדיוס.
6. יש לעסוק בהיקף מעגל ושטח עיגול באמצעים מספריים ואלגבריים.

דוגמאות:

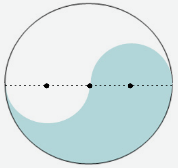
1. השרטוט מתאר איצטדיון שמורכב מריבוע ששטחו 144 מ"ר ושני חצאי עיגולים. מהו שטחו והיקפו של האיצטדיון?

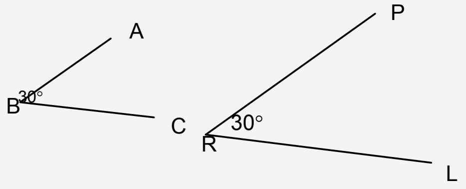


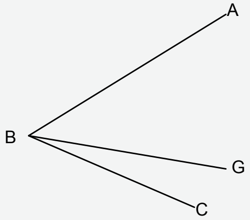
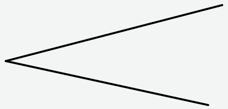
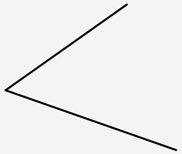
2. באיצטדיון שצורתו כמו באיור לעיל אך מידותיו שונות, אורכו של המסלול הפנימי 400 מטר.
מהו אורכו של המסלול הצמוד לו אם רוחבו של כל מסלול 1 מטר?
3. נתונים שלושה ריבועים חופפים, שבתוך כל אחד מהריבועים שורטטו עיגולים חופפים המשיקים זה לזה. באיזה מהאיורים השטח הצבוע אפור הוא הגדול ביותר ומדוע?

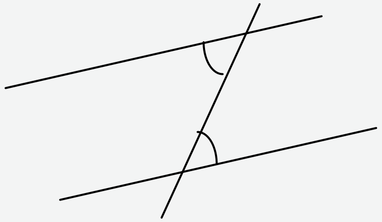
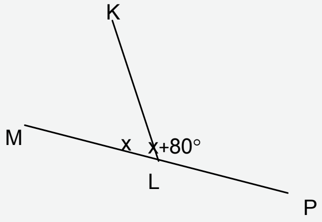
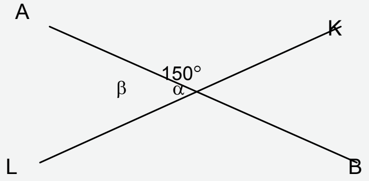


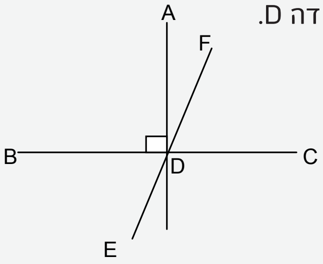
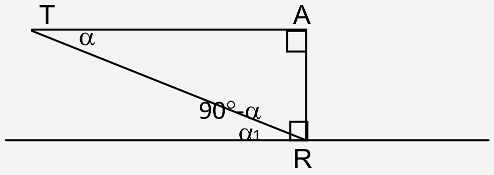
4. באיור הבא שטח העיגול הוא A. מה השטח של הצורה הצבועה בתוך העיגול?

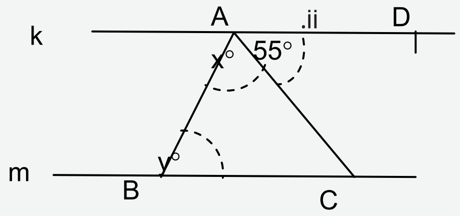
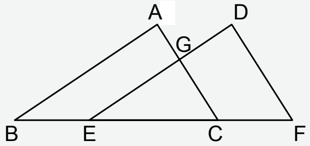


תחום גאומטרי: 2. שטחים (12 שעות) זוויות (15 שעות)	
זווית	**שתי קרניים היוצאות מנקודה אחת יוצרות זווית. הנקודה נקראת קודקוד הזווית, והקרניים נקראות שוקי הזווית.** **דגשים:** 1. יש לעסוק בסימון זוויות: באמצעות אות לטינית גדולה אחת המסמלת את קודקוד הזווית (∢B), באמצעות 3 אותיות לטיניות גדולות (∢ABC), באמצעות אות לטינית גדולה עם מספר קטן לצידה (∢B_2), או באמצעות אות יוונית (β). מומלץ להציג את דרכי הסימון של הזוויות בהדרגתיות. 2. שתי הקרניים קובעות שתי זוויות. נהוג לסמן את הזווית שאליה מתכוונים. בדרך כלל דנים בזווית הקטנה מבין השתיים. אחרת, יש לציין זאת במפורש.
זוויות שוות והשוואת זוויות	**שתי זוויות שוות זו לזו, אם ניתן להניח זווית אחת על גבי השנייה באופן שהקודקוד האחד מונח על גבי הקודקוד האחר, וכל אחת משתי הקרניים של הזווית האחת מונחת על גבי כל אחת משתי הקרניים של הזווית האחרת.** **אם מניחים זווית אחת על גבי האחרת, כך שקרן של זווית א מונחת על גבי קרן של זווית ב, והקרן הנוספת של זווית א נמצאת בין הקרניים של זווית ב, אז זווית א קטנה מזווית ב.** **הערה:** יש להדגיש שאורך הקרניים, כפי שבא לידי ביטוי בשרטוט, איננו רלבנטי לגודל הזווית. **דגשים:** 1. יש להזכיר את המושגים זווית חדה, זווית שטוחה וזווית קהה. **זווית חדה** היא זווית הקטנה מזווית ישרה. **זווית שטוחה** היא זווית שבה שתי הקרניים מונחות על אותו ישר במגמה הפוכה. **זווית קהה** היא זווית הגדולה מזווית ישרה וקטנה מזווית שטוחה 2. ההיכרות עם זוויות שוות והשוואת זוויות תעשה באמצעות שרטוט, גזירה, העתקה וקיפול של זוויות, וכן הנחת זווית על גבי זווית לצורך השוואה בין הגודל שלהן ובניית זווית בגודל נתון (למשל בשרטוט משולש). **דוגמאות:** 1. אלון טוען ש-∢ABC קטנה מ-∢PRL הסבירו מדוע אלון טועה. 

תחום גאומטרי: 2. שטחים (12 שעות) זוויות (15 שעות)	
זוויות שוות והשוואת זוויות	2. הסבירו מדוע זווית ABC גדולה מזווית ABG.  3. קבעו מי הזווית הגדולה מבין שתי הזוויות המשורטטות:  
סכום והפרש של זוויות	**דגשים:** 1. מציאת סכום (או הפרש) של זוויות מתבצע באמצעות שרטוט שתי זוויות בעלות קודקוד ושוק משותפים, לשם קבלת זווית שהיא תוצאת הפעולה. 2. זווית שטוחה היא סכום של שתי זוויות ישרות.
מדידת זוויות	**יחידת המדידה המקובלת של זוויות היא מעלה. ניתן להציג את המעלה כ-** $\frac{1}{90}$ **מזווית ישרה או כ-** $\frac{1}{180}$ **מזווית שטוחה.** **דגשים:** 1. יש לשלב מדידת זוויות באמצעות **מד-זווית.** 2. יש למצוא סכום זוויות והפרש זוויות באמצעות מד זווית. 3. ניתן למדוד במד זווית שתי זוויות מתחלפות בין מקבילים. 4. יש לשלב מדידת זוויות עם חישובי זוויות באמצעים חשבוניים ואלגבריים. **דוגמאות:** 1. מהי הזווית שעובר מחוג השעות במשך שעה? במשך שעתיים? במשך 4 שעות? 2. מהי הזווית שבין שני מחוגי השעון בשעה חמש?

תחום גאומטרי: 2. שטחים (12 שעות) זוויות (15 שעות)	
מדידת זוויות	3. סכום שתי זוויות הוא זווית ישרה. אחת הזוויות גדולה ב-30° מהזווית האחרת. מצאו את גודלן של שתי הזוויות. 4. מדדו במד זווית את כל הזוויות במשולשים או במרובעים ומצאו את סכומיהן. 5. נתונים שני ישרים מקבילים וישר שלישי החותך אותם. מדדו במד-זווית את הזוויות שמסומנות בשרטוט: 
זוויות צמודות	**זוויות צמודות הן שתי זוויות בעלות קודקוד ושוק משותפים, שמשלימות זו את זו לזווית שטוחה, ומכאן - סכום זוויות צמודות הוא 180°.** **דוגמה:** MP הוא קו ישר. מה גודל הזווית KLP בשרטוט? הציגו את דרך החישוב. 
זוויות קודקודיות	**שני ישרים שנחתכים יוצרים 4 זוויות, שכל אחת מהן קטנה מזווית שטוחה. מבין זוויות אלה, זוג זוויות שלהן רק קודקוד משותף נקראות 'זוויות קודקודיות'.** **זוויות קודקודיות שוות זו לזו.** **דגשים:** 1. ניתן לבדוק את שוויון הזוויות הקודקודיות באמצעות מד-זווית 2. ניתן לראות את שוויון הזוויות הקודקודיות תוך שימוש בזווית הצמודה המשותפת במספר מקרים, ולהכליל. **דוגמאות:** 1. AB ו- KL הם שני קטעים שנחתכים. מה הערך במעלות של $\alpha + \beta$? 

תחום גאומטרי: 2. שטחים (12 שעות) זוויות (15 שעות)	
זוויות קודקודיות	2. הקטעים EF ו-BC שבשרטוט נחתכים בנקודה D. נתון: ∢ADF = 27° .AD ⊥ BC מה הגודל של ∢BDE 
חוצה זווית	**חוצה זווית הוא קרן העוברת בקודקוד הזווית ומחלקת אותה לשתי זוויות השוות זו לזו.** **דגשים:** 1. חציית זווית תודגם באמצעות קיפול נייר. 2. חוצי הזוויות של זוויות צמודות מאונכים זה לזה. הטענה תנומק על ידי קיפול נייר, בחשבון ובאלגברה. 3. ישר החוצה אחת משתי זוויות קודקודיות חוצה גם את האחרת. הטענה תנומק על ידי קיפול נייר ושימוש בביטויים אלגבריים. 4. חוצה זווית שטוחה מאונך לקרני הזווית (זווית ישרה היא מחצית של זווית שטוחה). 5. ניתן להציג בפני התלמידים תרגילים חישוביים, חשבוניים ואלגבריים, המבוססים על המושג 'חוצה זווית'.
זוויות מתחלפות וזוויות מתאימות **זוויות מתחלפות בין מקבילים**	**נתונים שני ישרים וישר שלישי החותך את שניהם. נוצרות 8 זוויות. יש ללמוד לזהות מביניהן זוגות של זוויות מתאימות ומתחלפות.** **דגשים:** 1. ניתן להתמקד בזוויות מתחלפות פנימיות בלבד. 2. יש להציג דוגמאות של זוויות מתחלפות וזוויות מתאימות בין ישרים מקבילים וישרים שאינם מקבילים, ולמדוד זוויות במד-זווית. זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים שוות זו לזו. **דגש:** יש להמחיש את שוויון הזוויות באמצעות מדידות וקיפולי נייר. **מסקנה: סכום זוויות חדות במשולש ישר זווית הוא 90°.** המסקנה תנומק בדרך הבאה: נתון משולש ישר זווית ATR. דרך הנקודה R נעביר ישר המקביל ל-AT. AR הוא אנך משותף לשני המקבילים. $\sphericalangle T = \sphericalangle R_1 = \alpha$ כי הן זוויות מתחלפות שווה בין ישרים מקבילים, ומכאן שזווית ART משלימה את זווית R1 ל- 90°. 

תחום גאומטרי: 2. שטחים (12 שעות) זוויות (15 שעות)	
זוויות מתאימות בין מקבילים	**זוויות מתאימות בין ישרים מקבילים שוות זו לזו.** את שוויון הזוויות המתאימות בין ישרים מקבילים וישר חותך ניתן להראות או לנמק באמצעות שוויון הזוויות המתחלפות ושוויון זוויות קודקודיות. **דוגמאות:** 1. בשרטוט הישרים k ו- m מקבילים זה לזה. $\sphericalangle DAC = 55°$. מה הערך של $x + y$?  2. בשרטוט הבא הנקודות B, E, C, F ממוקמות על ישר אחד. כמו כן: $AC \parallel DF, AB \parallel DE, \sphericalangle B = 40°, \sphericalangle F = 60°$. מהו גודלה של הזווית EGC? 

סבב 3

תחום אלגברי	תחום גאומטרי
פונקציות (18 שעות) **משוואות ושאלות מילוליות** (20 שעות)	**משולש ומנסרה משולשת** (10 שעות)
המטרה העיקרית של סבב זה היא הצגת המושג 'פונקציה' כמייצג קשר בין שני גדלים שבו האחד תלוי בשני. הלימוד יתמקד בארבעה ייצוגים שונים של פונקציות: תיאור מילולי, גרף, טבלת ערכים וביטוי אלגברי. רוב התשתית ללימוד זה כבר קיימת. ההיכרות הראשונית עם המושג 'פונקציה' צריכה להיות 'רכה', עם דגש על המרה בין הייצוגים השונים וניתוחים איכותיים.	

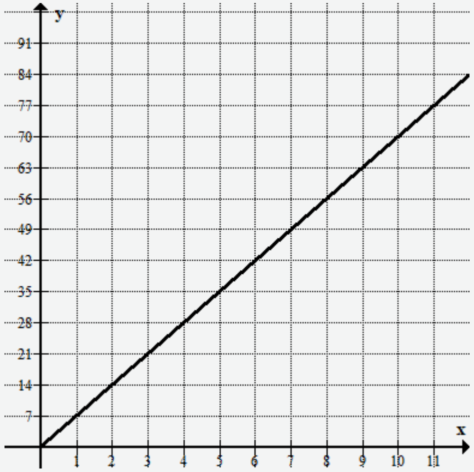
תחום אלגברי: 3. מבוא לפונקציות, פתרון משוואות, שאלות מילוליות	
נושאי הלימוד	**דגשים ודוגמאות**
גרפים שימושיים - קריאה ושרטוט	**דגשים:** 1. יש **להדגים תופעות המיוצגות באמצעות גרף** במערכת צירים, כך שתלמידים ידעו לקרוא אותו וליצור מתוכו טבלת ערכים חלקית. 2. יש להציג את הגרף כ**תוספת לייצוגים אחרים** שכבר נלמדו במהלך השנה: תיאורים מילוליים, טבלאות ערכים וביטויים אלגבריים. התוספת תודגם באמצעות דוגמאות ותופעות שכבר נלמדו בעבר. 3. עד כה התלמידים למדו להכליל טבלת ערכים לביטוי אלגברי ולייצג טבלת ערכים במערכת צירים. בשלב זה ילמדו התלמידים **לעבור מביטוי אלגברי לייצוג גרפי** באמצעות טבלת ערכים כשלב מתווך. 4. התלמידים ירכשו את המיומנויות הבאות בקריאת גרף: א. **מציאת הערך של y** שמתאים לערך נתון של x. ב. **מציאת ערך או ערכים של x** שמתאימים לערך נתון של y. ג. **מציאת הערך הגבוה (או הנמוך) ביותר** של y, ומציאת הערך או הערכים של x שעבורם מתקבל ערך זה של y. ד. מציאת טווח הערכים של y המתקבל עבור תחום נתון של x. 5. **תחום** בגרף הוא חלק מציר x. בשלב זה נתמקד בתחומים שצורתם קטע, קרן, קבוצה סופית של נקודות או איחוד של אלה. המושג 'תחום' יוזכר לצורך שימוש בו בהמשך במגוון של נושאים, כמו תחומי עלייה ותחומי ירידה של פונקציות. 6. במרבית הגרפים השימושיים שבהם ציר ה-x הוא משתנה רציף, משתנה זה מייצג זמן. יש לראות גם דוגמאות שבהן ציר ה-x מייצג גדלים אחרים.

תחום אלגברי: 3. מבוא לפונקציות, פתרון משוואות, שאלות מילוליות

גרפים שימושיים - קריאה ושרטוט

דוגמאות:

1. מחיר ליטר דלק הוא 7 שקלים. צרו טבלה המתארת התאמה בין כמויות שונות של דלק (בליטרים) לבין עלותם (בשקלים). שרטטו את הנקודות המתאימות לערכים שבטבלה על מערכת צירים.
2. בין השעות 21:00 ל-06:00 קיימת עמלה קבועה בת 2 שקלים עבור כל מילוי של דלק. כתבו ביטוי אלגברי המתאר את העלות של d ליטרים של דלק בשעות אלה. שרטטו גרף המתאר את העלות של כמויות שונות של דלק בשעות אלה. שימו לב שהגרף מתאים עלות יחידה לכל כמות של דלק.
3. נסמן ב-m את אורך הצלע במשולש שווה צלעות. צרו טבלה המתארת את היקף המשולש עבור ערכים שונים של m ושרטטו את הנקודות המתאימות לערכים בטבלה על מערכת צירים.
4. לפניכם קישור לגרף המתאר את מפלס הכנרת משנת 1990 ועד שנת 2001.
ענו על שאלות הבאות בהסתמך על הגרף:
   א. מה היה מפלס הכנרת בחודשים פברואר, יוני ואוקטובר בשנת 1995?
   ב. באילו חודשים היה מפלס הכנרת -211 מטר?
   ג. מה היה המפלס הגבוה ביותר ומה היה המפלס הנמוך ביותר בשנת 1998?
   ד. מה היו כל המפלסים של הכנרת בין השנים 1993 ו-1997?
   ה. באילו שנים היה מפלס הכנרת נמוך מ- -210 לאורך כל השנה?
5. מחיר דלק הוא 7 שקלים לליטר. נתון גרף המתאר את העלות של כמויות שונות של דלק.



תחום אלגברי: 3. מבוא לפונקציות, פתרון משוואות, שאלות מילוליות	
גרפים שימושיים - קריאה ושרטוט	א. עבור אילו כמויות של דלק העלות גבוהה מ- 150 שקלים? סמנו על ציר x (במרקר) את תחום זה. ב. עבור אילו כמויות של דלק העלות נמוכה מ- 150 שקלים? סמנו על ציר x (במרקר שונה) את תחום זה. ג. ניתן לתדלק מכוניות פרטיות בכמות דלק שאינה עולה על 50 ליטר. ניתן לתדלק מכוניות מסחריות בכמות דלק שאינה עולה על 70 ליטר. ד. סמנו על ציר x (במרקר אחר) את התחום המתאר את כמויות הדלק שמתאימות למכוניות מסחריות ואינן מתאימות למכוניות פרטיות. 6. נתון גרף המתאר שטחים של ריבועים המורכבים מגפרורים שלמים. על ציר ה-x מסומנים מספר הגפרורים בצלע אחת של הריבוע. ציר ה-y הוא שטח הריבוע. א. סמנו על ציר x את התחום של מספר גפרורים בצלע שעבורו שטח הריבוע גדול מ-10 וקטן מ-30. ב. סמנו על ציר x את התחום של מספר גפרורים בצלע שעבורו שטח הריבוע הוא 9.
מבוא לפונקציות	המושג **פונקציה** הוא מושג מרכזי בלימודי האלגברה בחטיבת הביניים, ובהמשך גם בחטיבה העליונה. הוא מובא בפני תלמידי כיתות ז לאחר שנוצרה תשתית מתאימה. התלמידים למדו כבר מהו **משתנה** ומהו **ביטוי אלגברי**. הם עבדו עם מגוון של ייצוגים (של פונקציה, מבלי לקרוא לה בשמה): **תיאור מילולי** של תופעה או חוקיות, **טבלת ערכים** המתארת תופעה באופן חלקי, **ביטוי אלגברי** המכליל את טבלת הערכים ו**גרף** המציג תופעה באופן חזותי. כמו כן, הם למדו להמיר ייצוג אחד באחר. ההיכרות הראשונית עם המושג **פונקציה** היא 'רכה': עיקר העיסוק הוא **שִׁיום** מושאי הפעילויות שנעשו עד כה והיכרות עם סימון הפונקציה בכתיב אלגברי. בשלב השני (אף הוא בכיתה ז), נלמד הנושא **השתנות של פונקציה**. גם נושא זה מוגש לתלמידי כיתה ז באופן 'רך', במטרה להפנים את המושג פונקציה ואת תכונות היסוד שלה, כהכנה להמשך הלימוד בשנים הבאות. פונקציה היא התאמה של מספר יחיד לכל מספר שנבחר. **דגשים:** 1. התוכנית מתייחסת ל**פונקציות מספריות** בלבד. 2. פונקציה מוצגת גם כ'מכונה' שפולטת מספר יחיד (ה**פלט**) לכל מספר שמוצב בה (ה**קלט**). 3. אפשר **לסמן פונקציה באות**, למשל f, ואז הערך שהפונקציה מתאימה ל-x מסומן ב-f(x) (למשל, הפונקציה מתאימה ל-5 את הערך f(5)). אפשר **לסמן פונקציה גם במשוואה הקושרת בין x לבין y**. בכל מקרה מומלץ לאמץ גישת סימון יחידה ולדבוק בה. בכיתה ח יוצגו שתי שיטות הסימון המקובלות. 4. פונקציה מוצגת גם באמצעות **גרף** במערכת צירים כך שלכל ערך x בציר האופקי מותאמת נקודה יחידה (x,y) על הגרף.

תחום אלגברי: 3. מבוא לפונקציות, פתרון משוואות, שאלות מילוליות	
מבוא לפונקציות	5. אם x הוא מספר שהפונקציה **אינה מתאימה** לו אף מספר, אז אומרים שהפונקציה אינה מוגדרת עבור ערך זה של x. אם יש תחום שהפונקציה **אינה מתאימה** למספרים שבו אף מספר, אז אומרים שהפונקציה אינה מוגדרת עבור תחום זה. **דוגמאות:** 1. תארו באופן אלגברי את כלל ההתאמה של פונקציה המתאימה לאורך צלע של ריבוע את שטח הריבוע. 2. לפניכם קישור לגרף המתאר את מפלס הכנרת משנת 1990 עד שנת 2001. http://gvirtzman.es.huji.ac.il/800x600/courses/pic12-2.htm גרף זה מתאר פונקציה, מכיוון שלכל חודש שנבחר מתאים גובה יחיד של מפלס הכנרת. ראו שאלות אפשריות בסעיף 'גרפים שימושיים'. 3. מכונות התדלוק שבתחנת דלק מציגות את העלות שיש לשלם עבור כמות הדלק שנשאב מהן. הקלט של מכונת התדלוק הוא כמות הדלק שנשאב והפלט הוא העלות. כלל ההתאמה בין כמות הדלק לעלות מקיים את התנאים הבאים: בתדלוק עצמי המחיר הוא 7 שקלים לכל ליטר דלק. בתדלוק על ידי מתדלק בשעות היום המחיר הוא 7.35 שקלים לכל ליטר דלק. בתדלוק על ידי מתדלק בשעות הלילה המחיר הוא 7.35 שקלים לכל ליטר דלק, עם תוספת קבועה (בלתי תלויה בכמות הדלק) של 2 שקלים. שלושת התיאורים הללו, המתאימים עלות לכל כמות דלק מתארים שלוש פונקציות שונות. תארו אותן באופן אלגברי.
ייצוגים שונים של פונקציה	התלמידים לומדים לייצג פונקציות באמצעים הבאים: **ייצוג מילולי:** תיאור מילולי של כלל ההתאמה. **ייצוג גרפי:** סימון כל הנקודות (x,y) שבהן y = f(x), **ייצוג טבלאי:** טבלה מספרית עם ציון הכינוי של הגדלים המתוארים בה. **ייצוג אלגברי:** ביטוי כלל ההתאמה באמצעות ביטוי אלגברי. **דגש:** התלמידים ידעו להמיר ייצוגים שונים של פונקציה כשהדבר אפשרי. **דוגמה:** נתבונן בפונקציה המתאימה לאורך (בס"מ) צלע של ריבוע את שטחו (בסמ"ר). **ייצוג מילולי:** שטח הריבוע שווה למכפלת אורך צלעו בעצמו.

תחום אלגברי: 3. מבוא לפונקציות, פתרון משוואות, שאלות מילוליות

ייצוגים שונים של פונקציה

ייצוג גרפי:

ייצוג טבלאי:

11	4.5	3		1	0.5	אורך צלע בס"מ
121	20.25	9	2	1	0.25	שטח הריבוע בסמ"ר

הערה: כשהמשתנה רציף - הייצוג הטבלאי הוא חלקי בלבד, וקיימת הנחה שהערכים המיוצגים מאפשרים לדעת על הערכים שאינם מיוצגים.

ייצוג אלגברי: אם נסמן את אורך צלע ריבוע ב- x ואת שטח הריבוע ב-y, אז הפונקציה היא $y = x^2$. אם נסמן את הפונקציה ב-f, אז הפונקציה היא $f(x)=x^2$.

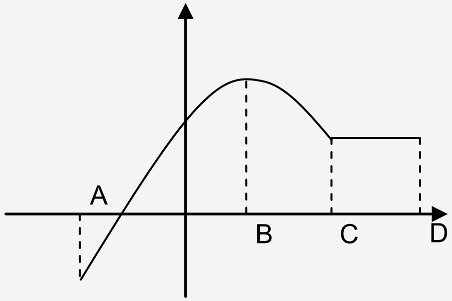
הפונקציה אינה מוגדרת עבור $x<0$.

הִשתנות של פונקציה

הִשתנות של פונקציה היא השינוי בערך של y (או של f(x)) כש-x משתנה.

דגשים:

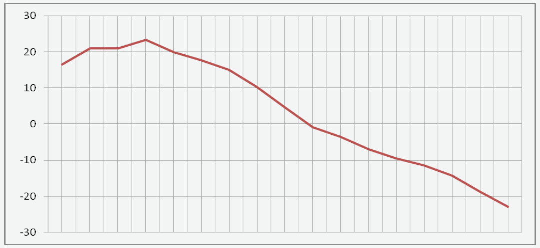
1. יש להדגים באמצעות טבלאות וגרפים כיצד פונקציה מתארת תופעה. מהכרת הפונקציה אפשר ללמוד על השתנות של תופעה.
2. ההשתנות של פונקציה באה לידי ביטוי בייצוג הגרפי במעבר מנקודה אחת על הגרף לנקודה אחרת עליו, ובשינוי של ערכי הפונקציה בין שתי הנקודות.
3. בתחום שבו הפונקציה אינה משתנה נאמר שהפונקציה **קבועה**.

תחום אלגברי: 3. מבוא לפונקציות, פתרון משוואות, שאלות מילוליות	
הִשתנות של פונקציה	**דוגמה:** בכל אחת מהפונקציות הבאות בחרו שני ערכים של x ומצאו מהי ההשתנות של הפונקציה בין שתי נקודות אלה: 1. פונקציה המתארת תנועה של גוף מתארת השתנות של מיקום הגוף בהתאם להשתנות נקודת הזמן. 2. פונקציה המתארת את מפלס הכנרת מתארת השתנות של גובה פני המים בהתאם להשתנות נקודת הזמן. 3. פונקציה המתארת תשלום עבור קניית דלק מתארת את ההשתנות של עלות הדלק בהתאם להשתנות הכמות שנשאבת. ד. פונקציה המתארת את טמפרטורת האוויר באטמוספירה מתארת את השתנות הטמפרטורה בהתאם להשתנות גובה המדידה.
עלייה וירידה של פונקציה	**פונקציה נקראת עולה (יורדת) בתחום אם הערך של y גדול (קטן) יותר ככל שהערך של x גדול יותר, לכל x בתחום.** **דגשים:** 1. המושגים **עלייה וירידה של פונקציה בתחום** יוצגו ויוסברו באמצעות טבלה וגרף. 2. המושגים **עלייה וירידה של פונקציה בתחום** יוסברו בדרך איכותנית על ידי התבוננות בהשתנות הערכים של y כשהערכים של x מסודרים בטבלה בסדר עולה. 3. המושגים **עלייה וירידה של פונקציה בתחום** יוסברו בדרך איכותנית על ידי התבוננות במהלך הגרף משמאל לימין. 4. יש להבהיר את ההבדל בין **הגרף** בתחום העלייה לבין **תחום העלייה**. התלמידים צריכים לזהות את תחומי העלייה והירידה של פונקציה ולכתוב אותם בכתיב אלגברי. דוגמאות: 1. הגרף שבשרטוט עולה בקטע AB. באיזה קטע הגרף יורד ובאיזה קטע הוא קבוע?  2. שרטטו גרף של פונקציה, כשמשיכת כלי הכתיבה כל הזמן לכיוון ימין. סמנו במרקר צהוב את התחום שבו הגרף עולה ובמרקר ירוק את התחום שבו הוא יורד. 3. התבוננו בגרף המתאר את מפלס הכנרת. סמנו במרקר צהוב את התחום שבו הגרף עולה ובמרקר ירוק את התחום שבו הוא יורד.

תחום אלגברי: 3. מבוא לפונקציות, פתרון משוואות, שאלות מילוליות

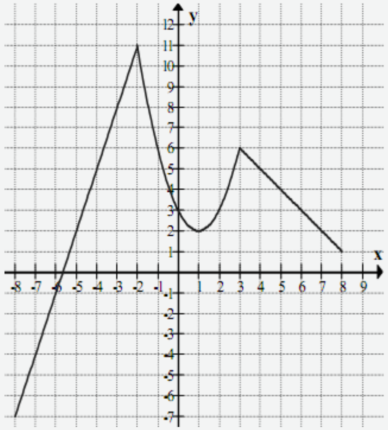
עלייה וירידה של פונקציה

4. לפניכם גרף המתאר את הטמפרטורה שנמדדה באטמוספרה בעזרת בלון. הנתונים נלקחו משרות מזג האוויר העולמי. התבוננו בגרף וסמנו במרקר כחול את התחום שבו הוא עולה ובמרקר אדום את התחום שבו הוא יורד.



5. התבוננו בגרף המתאר את גובהו של נער מעל האדמה בזמן שהוא מסתובב שני סיבובים בגלגל ענק. סמנו במרקר צהוב את התחום שבו הגרף עולה ובמרקר ירוק את חלקי הגרף שבהם הוא עולה.

6. עבור הפונקציה המתוארת באמצעות הגרף הבא, זהו ורשמו את התחום שבו הפונקציה יורדת.



תחום אלגברי: 3. מבוא לפונקציות, פתרון משוואות, שאלות מילוליות

השתנות של פונקציה בקצב אחיד ובקצב לא אחיד

קצב ההשתנות של פונקציה הוא המנה שבין השינוי בערכי ה- y לבין השינוי בערכי ה- x שלה. אם אותה המנה מתקבלת לכל שני ערכים שונים של x, אז קצב ההשתנות הוא אחיד. בכל מקרה אחר - פונקציה משתנה בקצב שאינו אחיד.

דגש:

צריך להבדיל בין השתנות בקצב אחיד לבין השתנות בקצב לא אחיד, כשהפונקציה מיוצגת באמצעות טבלה או גרף:

א. כשהטבלה מוצגת כך שערכי ה- x מסודרים בסדר עולה ובהפרשים קבועים, קצב ההשתנות הוא קבוע אם גם ערכי ה-y מופיעים בהפרשים קבועים.

ב. הביטוי הגרפי של קצב ההשתנות של הפונקציה הוא היחס שבין השינוי האנכי של הגרף לבין השינוי האופקי שלו. מקובל לכנות זאת קצב שינוי על פני מדרגה. גרף משתנה בקצב אחיד אם קצב השינוי הוא זהה על פני כל המדרגות, ובמקרה זה הגרף הוא קו ישר. בכל מקרה אחר, הגרף משתנה בקצב שאיננו אחיד.

דוגמה להשתנות בקצב אחיד:

הטמפרטורה של נוזל היא 8°c. מחממים את הנוזל בקצב אחיד כך שהטמפרטורה שלו תהיה 58°c כעבור 5 דקות.

א. בכמה מעלות מתחמם הנוזל בכל דקה?

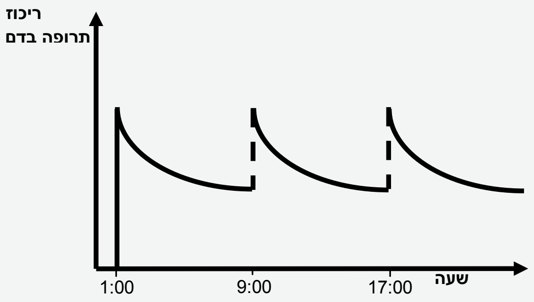
ב. שרטטו גרף המתאר את התחממות הנוזל במשך 9 דקות.

ג. מה תהיה הטמפרטורה אחרי 3 דקות?

ד. אחרי כמה דקות תהיה הטמפרטורה 78°c?

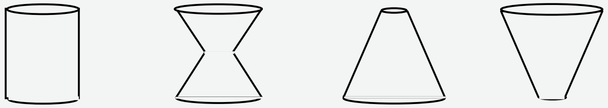
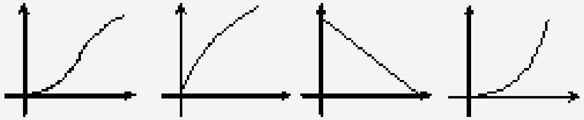
דוגמה להשתנות בקצב שאינו אחיד:

הגרף הבא מתאר ריכוז של תרופה בדם לאורך זמן. הריכוז עולה כמעט מיידית עם הזרקת התרופה, והוא יורד במשך הזמן עם פינוי התרופה מהגוף (הערה: העלייה המהירה בריכוז התרופה מתוארת בגרף בקווים כמעט מאונכים).



א. באיזו שעה ניתנה הזריקה הראשונה, וכל כמה שעות מזריקים את התרופה? הסבירו.

ב. מתי יורד ריכוז התרופה בדם בקצב יותר מהר: שעה אחרי נטילתה או שעה לפניה? הסבירו.

תחום אלגברי: 3. מבוא לפונקציות, פתרון משוואות, שאלות מילוליות	
השתנות של פונקציה בקצב אחיד ובקצב לא אחיד	**דוגמה:** לפניכם ארבעה כלים.  מניחים כל כלי מתחת לברז שהמים נשפכים ממנו בקצב אחיד. א. תארו כיצד ישתנה, עם התקדמות הזמן, גובה המים בכל אחד מהכלים. מתי ישתנה מהר ומתי ישתנה לאט? באיזה כלי משתנה גובה המים בקצב אחיד? ב. שלושה מהגרפים הבאים מתארים את ההשתנות בזמן של גובה המים בשלושה מן הכלים. התאימו כל גרף לאחד הכלים. הסבירו מדוע הגרף השני מימין אינו מתאים לאף כלי ותקנו אותו כך שיתאים לכלי הרביעי. 
פתרון משוואות קוויות	פתרון של משוואות שצורתן: $ax + b = cx + d$ וכן משוואות שניתן להעביר לצורה זו, למשל: $a(bx + c) = d(fx + e)$. **דגשים:** 1. פרק זה הוא המשך של פרק פתרון המשוואות בסבב 2, שבו המשוואות היו מוגבלות למצב שבו המשתנה מופיע באגף אחד בלבד. 2. פתרון המשוואות הוא כלי עזר לפתרון שאלות מילוליות, ורמת השאלות המילוליות היא שקובעת את רמת הטכניקה הנדרשת. 3. פתרון המשוואות יילמד במשולב עם פתרון שאלות מילוליות. 4. המקדמים צריכים להיות גם שברים ומספרים מכוונים. 5. ניתן לנצל את הידע שנרכש בתחום הגרפים כדי לפתור משוואות גם על ידי שרטוט גרפים של שני האגפים. כיוון ששרטוט גרף אחד הוא סימון כל הנקודות (x,y) שבהן $y = ax+b$, ושרטוט גרף שני הוא סימון כל הנקודות (x,y) שבהן $y = cx+d$, הרי שנקודת החיתוך של שני הגרפים מאפיינת את כל הנקודות (x,y) שבהן $ax + b = cx + d$.
שאלות מילוליות בשילוב משוואות קוויות	**השאלות תעסוקנה בתכנים שונים ותתאמנה למשוואות מהצורה: $ax + b = cx + d$ או: $a(bx + c) = d(fx + e)$** **דגשים:** 1. ניתן לפתור את השאלות באמצעים גרפיים ו/או אלגבריים. 2. שאלות אחדות תיפתרנה באופן חלקי בלבד לצרכים הבאים: • זיהוי המשמעות של המשתנה שנבחר. • זיהוי הגרף המתאים. • זיהוי המשוואה המתאימה. • זיהוי הפונקציה המתאימה.

תחום אלגברי: 3. מבוא לפונקציות, פתרון משוואות, שאלות מילוליות

שאלות מילוליות בשילוב משוואות קוויות

דוגמאות:

1. לדני היו פי שניים יותר בולים מאשר לרינה. לאחר שנתן לרינה 7 בולים, היה להם מספר שווה של בולים. כמה בולים יש להם יחד? נתונים שלושה תיאורים אפשריים של משתנים ושלוש משוואות. התאימו לכל בחירה של משתנה את המשוואה המתאימה לו:

x מתאר את מספר הבולים שהיו לדני בתחילה.	$x - 7 = \frac{x}{2} + 7$
x מתאר את מספר הבולים שהיו לרינה בתחילה.	$\frac{x}{2} + 7 = 2(\frac{x}{2} - 7)$
x מתאר את מספר הבולים שהיו לדני ולרינה יחד.	$2x - 7 = x + 7$

2. תוכננה מסיבת יום הולדת עבור 18 ילדים ולקראתה הכינו לכל ילד אותו מספר של מדבקות. לבסוף הגיעו 20 ילדים, וכל ילד קיבל 2 מדבקות פחות מהמתוכנן. כמה מדבקות תוכננו לכל ילד מלכתחילה?

   x מייצג את ______________________ המשוואה המתאימה: ______________________________

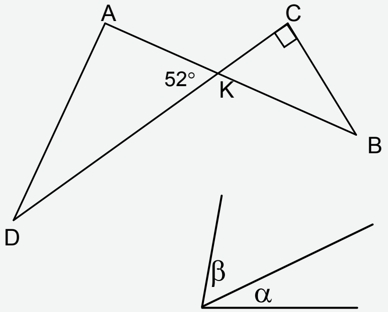
3. נתונים ריבוע ומשולש שווה צלעות. אורך צלע במשולש גדול ב-1 ס"מ מאורך צלע בריבוע. היקפו של הריבוע גדול ב-3 ס"מ מהיקפו של המשולש.

   א. נסמן ב- x את צלע הריבוע. מתוארות ארבע פונקציות: קבעו אילו מבין הפונקציות מתארות את היקפו של הריבוע, ואילו מתארות את היקפו של המשולש: $f(x) = 4x$ $g(x) = 4x - 3$ $k(x) = 3(x + 1)$ $m(x) = 3(x + 1) + 3$

   ב. מהו אורך צלע הריבוע?

4. דן גדול מיואב ב-6 שנים. לפני 4 שנים היה גילו של דן פי 2 מגילו של יואב. בני כמה דן ויואב כיום?

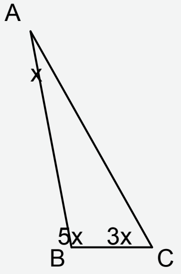
5. בתחנת דלק א מחיר הדלק 6.45 שקלים לליטר, ועמלת התדלוק בלילה: 4 שקלים. בתחנת דלק ב מחיר הדלק 6.55 שקלים לליטר, ועמלת התדלוק בלילה: 2 שקלים. מהי כמות הדלק שעבורה עלות התדלוק בלילה בשתי התחנות תהיה שווה?

תחום גאומטרי: 3. משולש ומנסרה משולשת (10 שעות)	
נושאי הלימוד	**דגשים ודוגמאות**
זוויות המשולש	**סכום זוויות במשולש הוא 180°.** **דגשים:** 1. העובדה תנומק בעזרת קיפולי נייר ובאמצעות העברת ישר מקביל דרך אחד הקודקודים, ומתוך שוויון הזוויות המתחלפות. 2. יש לעסוק במדידת זוויות במשולשים, בחישובים ובתובנה כמו: אם המשולש ישר זווית אז סכום הזוויות החדות הוא 90°, במשולש קהה זווית שתי הזוויות האחרות חדות וכו'. 3. יש להרחיב את המושג 'חוצה זווית' שנלמד בפרק 'זוויות' ל'חוצה זווית במשולש', ולערוך מדידות וחישובים בעזרת חוצה הזווית. 4. יש לעסוק בסכום הזוויות במשולש באמצעים מספריים ואלגבריים, כולל פתרון משוואות. **דוגמאות:** 1. שרטטו משולשים שבהם הזוויות הן בנות: 30°, 50°, 100°. 2. בשרטוט נתון: AB ו- CD הם קטעים הנחתכים בנקודה K. $\sphericalangle AKD = 52^\circ$, $DC \perp CB$ חשבו את גודל $\sphericalangle B$.  3. נתון כי הזוויות α ו- β שבשרטוט הן שתי זוויות של משולש. שרטטו את הזווית השלישית של המשולש. איזה משולש מתאים לשלוש זוויות אלה? 4. איזו מבין הטענות הבאות **נכונה תמיד**? נמקו. א. אם במשולש יש שתי זוויות חדות, גם הזווית השלישית חדה. ב. במשולש ישר זווית, כל אחת משתי הזוויות האחרות שווה 45°. ג. במשולש ישר זווית, שתי הזוויות האחרות חדות. ד. בכל משולש, לפחות שתיים מהזוויות הן חדות. 5. איזו מבין הטענות הבאות **אינה נכונה**? א. קיים משולש ישר זווית ובו זווית בת 60° ב. קיים משולש שווה שוקיים בו זוויות הבסיס קהות. ג. קיים משולש שווה שוקיים בו זווית הראש קהה. ד. קיים משולש בו אחת הזוויות היא בת 1°.

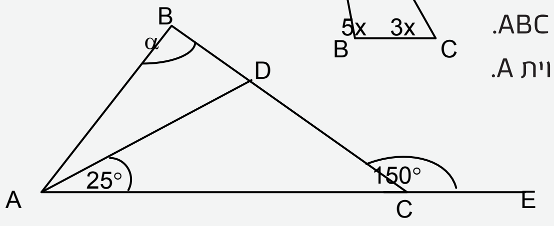
תחום גאומטרי: 3. משולש ומנסרה משולשת (10 שעות)

זוויות המשולש

6. במשולש ABC נתון כי זווית A שווה ל- 100°.
איזו מבין הטענות הבאות **אינה נכונה**?
   א. הזווית B קטנה מזווית A.
   ב. זווית B קטנה מ-90°.
   ג. המשולש ABC הוא משולש קהה-זווית.
   ד. סכום הזוויות B ו-C גדול מזווית A.
7. בשרטוט שלפניכם x מייצג את הגודל של זווית A במשולש ABC.
היעזרו בנתונים המופיעים בשרטוט וחשבו את הגודל של זווית A.



8. נתון משולש ABC. CE הוא המשך הצלע AC (ראו שרטוט).
AD הוא חוצה זווית BAC.
נתון: $\sphericalangle BCE = 150^\circ, \sphericalangle DAC = 25^\circ$ מה גודלה של הזווית α?



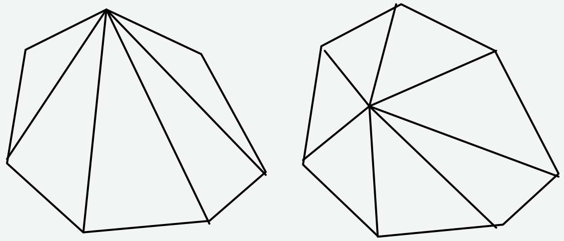
זוויות במרובע
זוויות במצולעים

סכום זוויות במרובע הוא 360°.

סכום זוויות במצולע בעל n צלעות הוא 180(n - 2)

דגש:

1. העובדה תנומק על ידי חלוקת המרובע (או המצולעים) למשולשים על ידי אלכסון (או האלכסונים). מוצעות שתי דרכים לחלוקה:



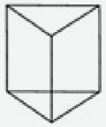
2. סכום הזוויות במרובע שאינו קמור גם הוא 360°.
ניתן להגיע לחישוב גודל כל זווית במצולע משוכלל בעל n צלעות.

תחום גאומטרי: 3. משולש ומנסרה משולשת (10 שעות)	
צלעות המשולש	**סכום שתי צלעות במשולש גדול מצלע שלישית.** הטענה תתקבל באמצעות שימוש במודלים כמו קשיות, ישרים משורטטים על שקף, שרטוט משולשים, וכשנתונים אורכים של צלעות. **דגש:** במשולש ישר זווית היתר גדול מכל אחד מהניצבים. **דוגמאות:** 1. במשולש נתונות שתי צלעות: 12 ס"מ = AB ו- 5 ס"מ = AC. איזו מבין הטענות הבאות אינה אפשרית? (ניתן להיעזר בשרטוט משולשים) א. המשולש ABC שווה שוקיים והבסיס שלו 5 ס"מ. ב. המשולש ABC שווה שוקיים והבסיס שלו 12 ס"מ. ג. המשולש ABC ישר זווית והצלעות AB ו- AC ניצבים שלו. ד. המשולש ABC ישר זווית ו- AB הוא היתר במשולש. 2. נתונים שלושה מקלות באורכים שונים. כמה משולשים שונים ניתן לבנות בעזרתם? 3. נתון חוט שאורכו 12 ס"מ. יש לגזור את החוט לשלושה חלקים כך ש: • ניתן יהיה ליצור משולש מהחלקים; • אי אפשר יהיה ליצור משולש מהחלקים.

תחום גאומטרי: 3. משולש ומנסרה משולשת (10 שעות)

מנסרה משולשת ישרה: היכרות עם הגוף, חישוב שטח פנים, חישוב נפח, פריסה

מנסרה משולשת ישרה היא גוף ששתיים מפאותיו הן משולשים ו-3 פאות הן מלבנים. המשולשים נקראים 'בסיסי המנסרה', והמלבנים נקראים 'פאות צדדיות של המנסרה'.

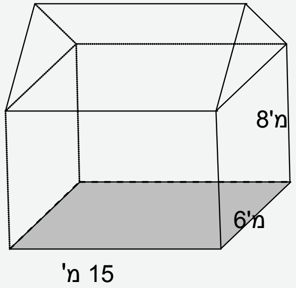


דגשים:

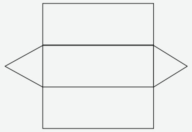
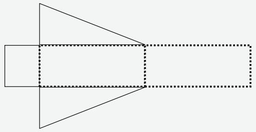
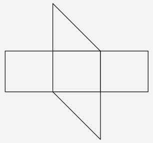
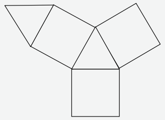
1. ניתן לקבל נפח של מנסרה משולשת, שהבסיס שלה משולש ישר זווית, על ידי חציית תיבה לשתי מנסרות (כפי שנעשה בנושא שטח, במעבר ממלבן למשולש ישר זווית).
2. ניתן לקבל נפח של מנסרה משולשת כלשהי כסכום או כהפרש של שתי מנסרות שבבסיסיהן משולשים ישרי זווית.
3. יש ללמוד לחשב את שטח הפנים והנפח של מנסרה שממדיה נתונים באמצעים מספריים ואלגבריים.
4. יש לדון בהשתנות שטח פני המנסרה המשולשת כתוצאה משינויים חיבוריים וכפליים באורכי המקצועות, למשל, במקרים בהם אורכי כל המקצועות מוכפלים פי 2.
5. יש לדעת לשרטט פריסה של מנסרה משולשת.
6. ניתן לשלב ידע בנושאים: צורות חופפות, סוגי משולשים ומנסרות משולשות.

דוגמאות:

1. א. מאילו גופים מורכב המבנה באיור?
   ב. חשבו את נפח המבנה, אם נתון שהגובה של הגג הוא 2 מ'.
   ג. אם נפח הגג הוא 765 מ"ק, מה גובהו של הגג?



2. בדקו את הפריסות הבאות וקבעו מאילו מהן אפשר לבנות מנסרה משולשת ומאילו אי אפשר.

3. תארו את התכונות של בסיסי המנסרה כאשר ידוע ש:
   - שלוש הפאות הצדדיות חופפות זו לזו;
   - שתיים מהפאות הצדדיות חופפות זו לזו;
   - הפאות הצדדיות של המנסרה אינן חופפות.
4. דונו במקרים שבהם מצירוף של שתי מנסרות משולשות ניתן לקבל:
   - מנסרה משולשת;
   - תיבה;
   - גוף אחר.

תוכנית הלימודים לכיתה ח

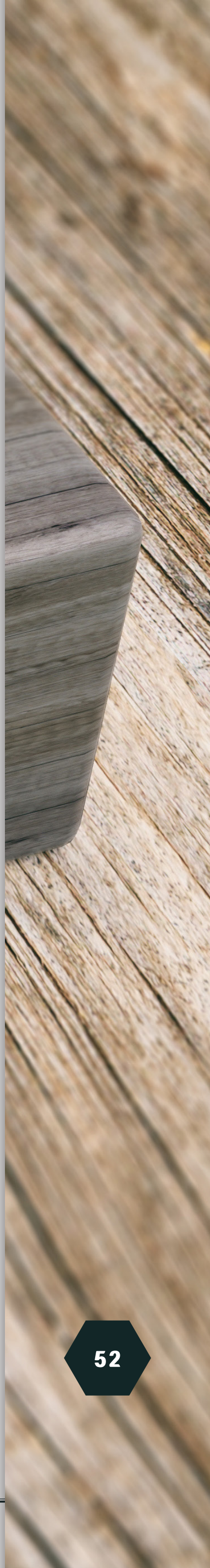
הנחיות כלליות[1]

מבנה התוכנית ועקרונותיה:

1. כמו בכיתה ז, תוכנית הלימודים מחולקת לשלושה תחומים - תחום מספרי, תחום אלגברי ותחום גאומטרי. על שלושת התחומים להילמד תוך שילוב מושכל ביניהם. בכל נושא מובאים הן דגשים והן דוגמאות אפשריות לשילוב בין התחומים.
2. הלימוד מבוסס על שלושה סבבים, כשבכל אחד מהם יש למידה של כל אחד משלושת התחומים. כל סבב מתבסס על הסבבים שקדמו לו.
3. לימודי התחום המספרי בכיתה ח מושתתים על הידע שנצבר במהלך בית הספר היסודי ובכיתה ז. המושג 'יחס', הנלמד בתחילת השנה כסבב נוסף על לימודי בית הספר היסודי, מהווה מוטיב מרכזי בהמשך הלימודים בכיתה ח במגוון נושאים: קנה מידה, קטעים פרופורציוניים, דמיון משולשים, שיפוע של קו ישר, פונקציה קווית מהצורה y = mx, אחוזים, שכיחות יחסית והסתברות.
4. לימודי התחום האלגברי בכיתה ח מבוססים על המושגים והמיומנויות שנלמדו בכיתה ז, כגון: ביטוי אלגברי, פתרון משוואה והמושג **פונקציה**. בכיתה ח המושג 'פונקציה קווית' מוביל אל עבר פתרון משוואות קוויות, מערכות משוואות קוויות בשני נעלמים, אי-שוויונות, משוואות עם ערך מוחלט וכן שאלות מילוליות שפתרונן נעשה באמצעים אלה.
5. לימודי הגאומטרייה בכיתה ח, בדומה לכיתה ז, נלמדים בגישה קדם-דדוקטיבית, והם מושתתים על היכרות עם המושגים שנלמדו בכיתה ז. המושגים המרכזיים הנלמדים בכיתה ח (חפיפה ודמיון) נלמדים כבסיס וככלי עזר ללימודי הגאומטרייה היסקית בהמשך הלימודים. לפיכך, תשומת לב רבה מופנית בלימודי הגאומטרייה בכיתה ח לחיזוק השכנוע הפנימי של התלמידים באשר לנכונות משפטי החפיפה ומשפט הדמיון שאליהם הם נחשפים, להגיון שטמון בהם, וכן לשאלה מדוע התנאים בכל אחד ממשפטים אלה הכרחיים ומספיקים.
6. בתוכנית תכנים נוספים (על רקע אפור) עבורהמיועדים לתלמידים מתקדמים ומתעניינים.

---

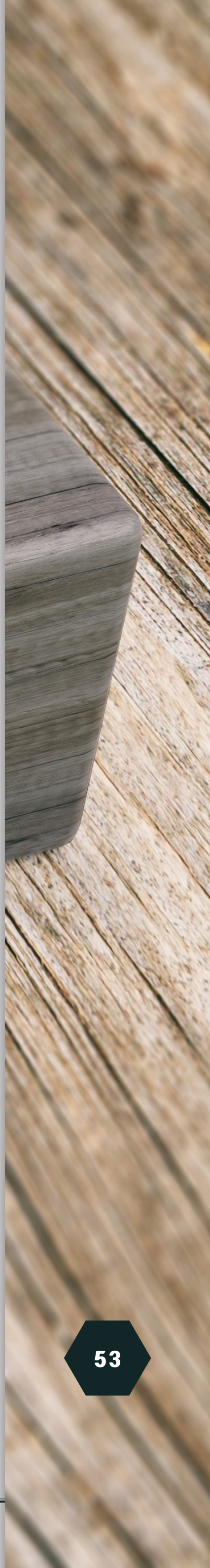
[1] בתכנית מופיעות דוגמאות הלקוחות ממבחני המיצ"ב.
וכן דוגמאות שפותחו בנושא צרכנות נבונה בשיתוף פעולה עם המועצה הישראלית לצרכנות.



סבב 1

תחום אלגברי	תחום מספרי	תחום גאומטרי
פונקציה קווית, אי-שוויון (20 שעות)	**יחס, פרופורציה, קנה מידה** (20 שעות)	**משולשים חופפים, תיכון ומשולש שווה שוקיים** (קדם דדוקטיבי) (14 שעות)

תחום אלגברי: 1. פונקציה קווית, אי-שוויון (20 שעות)	
נושאי הלימוד	**דגשים ודוגמאות**
הפונקציה הקווית	**פונקציה קווית היא פונקציה שבה קצב ההשתנות הוא אחיד.** **דגשים:** 1. התלמידים מכירים את המושג 'קצב השתנות אחיד' מכיתה ז. 2. בפרק זה נעשית האחדה בין שלושה היבטים של הפונקציה הקווית: פונקציה שבה קצב ההשתנות הוא אחיד, פונקציה שהגרף שלה הוא קו ישר, ופונקציה שהייצוג האלגברי שלה הוא מהצורה: $y = mx + b$. 3. יש לפתוח בדוגמאות של פונקציות שבהן קצב ההשתנות אחיד (טבלאות ערכים וגרפים) וללמוד שכל הפונקציות שבהן קצב ההשתנות הוא אחיד ניתנות לייצוג באמצעות משוואה מהצורה $y = mx + b$. 4. יש ללמוד את המשמעות של השיפוע של פונקציה קווית (היחס שבין ההשתנות של y ובין ההשתנות של x), ולזהות את ערכו עם המקדם של x בייצוג האלגברי של הפונקציה. 5. יש ללמוד שהגרפים של שתי פונקציות קוויות (שונות) שלהן אותו שיפוע הם **מקבילים**. 6. יש לקשר בין **הסימן של השיפוע** ובין עלייה / ירידה של פונקציה קווית. השיפוע של פונקציה קבועה הוא אפס. 7. יש לקשר בין **המקדם החופשי** בפונקציה הקווית (הפרמטר b), לבין ערך הפונקציה כש $x=0$, ולבין נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה-y בייצוג הגרפי. 8. יש ללמוד למצוא את נקודת החיתוך של גרף של פונקציה קווית עם ציר ה-x. זו הזדמנות לחזור על פתרון משוואות ממעלה ראשונה. 9. יש ללמוד למצוא ייצוג אלגברי של פונקציה קווית בהינתן גרף, בהינתן ערכיה בשתי נקודות ובהינתן ערכה בנקודה אחת והשיפוע שלה. 10. מומלץ לפתח יכולת לאמוד את גודלו של השיפוע מתוך התבוננות בגרף.



תחום אלגברי: 1. פונקציה קווית, אי-שוויון (20 שעות)

הפונקציה הקווית

דוגמאות:

1. לפניכם ייצוג של פונקציה g כטבלת ערכים חלקית: (יש לחזור על כך שאנו מניחים שניתן ללמוד מהטבלה על הפונקציה גם עבור ערכים שאינם בטבלה)

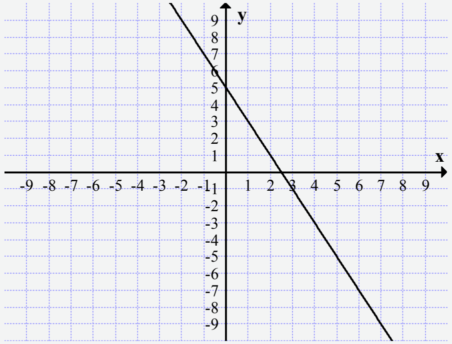
7	6	5	4	3	2	1	x
22	19	16	13	10	7	4	g(x)

א. האם פונקציה זו מתארת קצב השתנות אחיד? נמקו את תשובתכם.
ב. מהו קצב ההשתנות של הפונקציה?
ג. שרטטו את הגרף של פונקציה זו.
ד. מהו ערך הפונקציה בנקודות: x = 8, x = 12 ו- x = 100?

2. נתונה הפונקציה y = 2x + 4

א. בנו טבלת ערכים חלקית שבה 5 נקודות.
ב. שרטטו את הגרף של פונקציה זו.
ג. מהו קצב ההשתנות (השיפוע) של הפונקציה?
ד. מהו ערך הפונקציה כש-x = 0 ?
ה. עבור איזה ערך של x ערך הפונקציה הוא אפס?

3. נתון גרף של פונקציה קווית:



א. בנו טבלת ערכים חלקית הכוללת 5 נקודות.
ב. מהו קצב ההשתנות (השיפוע) של הפונקציה?
ג. מהו ערך הפונקציה כש-x = 0 ?
ד. מהו הייצוג האלגברי של גרף זה?

4. נתון שגרף של פונקציה קווית עובר דרך הנקודות (1,-2) ו-(3,2) .

א. מהו קצב ההשתנות של הפונקציה?
ב. שרטטו את גרף הפונקציה.
ג. מהו ערך הפונקציה כש- x = 0? כש- x = 5?
ד. מהו הייצוג האלגברי של פונקציה זו?

תחום אלגברי: 1. פונקציה קווית, אי-שוויון (20 שעות)	
הפונקציה הקווית	5. מהו הייצוג האלגברי של הגרף הישר העובר דרך הנקודה (3,5) ומקביל לישר העובר דרך הנקודות (2,4) ו-(3,6.5)? 6. נתונות שתי הפונקציות: $f(x) = 3x + 5$ $g(x) = -2x - 10$ א. שרטטו את הגרפים של שתי הפונקציות במערכת צירים משותפת. ב. מהם שיעורי נקודת החיתוך של שני הגרפים? ג. מהו הערך של x שעבורו $f(x) = g(x)$? **הערות:** 1. לפונקציה קווית קוראים גם **פונקציה ממעלה ראשונה**, או **פונקציה ליניארית**. 2. **קו אנכי** אינו גרף של פונקציה, ולמרות זאת יש לו ייצוג אלגברי. 3. כשלומדים **אי-שוויונות קוויים** מומלץ לקשר אותם **לתחומי חיוביות / שליליות** של הפונקציה הקווית.
ייצוג תופעות באמצעות פונקציות קווית	**דגשים:** 1. יש לעסוק בפונקציות קווית בהקשר של שאלות מילוליות. 2. יש לפתור בעיות המתארות תהליכי השתנות באמצעות פונקציות קווית. **דוגמה:** משאית יצאה בשעה 6:00 מאילת לקריית שמונה (המרחק בין הערים כ-600 ק"מ). באותה השעה יצאה משאית אחרת מקריית שמונה לכיוון אילת. האיור מימין מציג גרפים המתארים את המרחק מאילת של שתי המשאיות בזמנים שונים. א. בגרף מסומנות 4 נקודות. הסבירו מה מתארות נקודות אלה. ב. מה הייתה מהירותה של המשאית שיצאה מאילת? ג. באיזו שעה ובאיזה מרחק מאילת נפגשו המשאיות? ד. איזו משתי המשאיות נסעה מהר יותר, וכיצד ניתן לדעת זאת? ה. כתבו שני ביטויים אלגבריים המתאימים לשתי הפונקציות בגרף. 

<table>
<tr><th colspan="2">תחום אלגברי: 1. פונקציה קווית, אי-שוויון (20 שעות)</th></tr>
<tr><td>אי-שוויונות קוויים</td><td>היכרות ראשונית עם המושג אי-שוויון אלגברי ופתרונו
דגשים:
1. אי-שוויון אלגברי הוא אי-שוויון שלפחות באחד משני האגפים שלו יש משתנה או נעלם (תלוי בהקשר).
2. פתרון של אי-שוויון אלגברי הוא מציאת תחום הערכים של המשתנה שעבורו אי-השוויון מתקיים.
3. בשלב זה של הלימוד, המכנים בשברים אלגבריים הם מספריים בלבד.
4. יש לעסוק באי-שוויונות קוויים באמצעים אלגבריים וגרפיים.
5. יש לעסוק בפתרון אי-שוויונות שבהם אי-השוויון הופך כיוון כתוצאה של כפל או חילוק במספר שלילי.
דוגמאות:
1. מהם תחומי הערכים של x שעבורם מתקיימים אי-השוויונות הבאים:
א. $x + 3 < 7.1$
ב. $8x - 4 > 17.2$
ג. $-2x > 1.3$
2. נתונות שתי הפונקציות: $g(x) = 3x - 7$ $f(x) = -2x + 3$
א. שרטטו את הגרפים של שתי הפונקציות על אותה מערכת צירים.
ב. מהו תחום הערכים של x שעבורו $f(x) < 0$?
ג. מהי הנקודה x שבה $f(x) = g(x)$?
ד. מהו תחום הערכים של x שעבורו $f(x) < g(x)$?
3. פתרו את אי-השוויון הבא: $\frac{3x+5}{-2} < 8$</td></tr>
</table>

תחום מספרי: 1. יחס, פרופורציה וקנה מידה (כולל שימושים אלגבריים) (20 שעות)	
נושאי הלימוד	**דגשים ודוגמאות**
יחס בין מספרים	**יחס הוא המנה של שני מספרים (גדלים או כמויות) חיוביים, ומשמש להשוואה בשאלה פי כמה גדול / קטן האחד מהשני.** **דגשים:** 1. יחס נקרא משמאל לימין. לדוגמה: את היחס 3 : 4 קוראים משמאל לימין: "3 ל- 4". 2. אם היחס בין גודל קבוצה א לגודל קבוצה ב הוא 2 : 5 אז היחס בין גודל קבוצה ב לגודל קבוצה א הוא 5 : 2. 3. כפי שפעולת החילוק מבטאת שתי משמעויות נפרדות (חילוק להכלה וחילוק לחלקים), כך גם פעולת היחס: הכוונה ליחס בין מספרי קבוצות הומוגניות, או ליחס פנימי של איברים בקבוצות הטרוגניות. לדוגמה: אם היחס בין מספר הבנים בכיתה למספר הבנות הוא 3 : 4 אז ניתן לחלק את הכיתה ל-7 (3+4) קבוצות שוות בגודלן שמהן שלוש קבוצות כוללות רק בנים וארבע קבוצות כוללות רק בנות; זהו יחס בין מספרי קבוצות הומוגניות. לעומת זאת, ניתן לחלק את הכיתה לקבוצות של 7 תלמידים באופן שבכל קבוצה 3 בנים ו- 4 בנות. זהו יחס פנימי של איברים בקבוצות הטרוגניות. 4. היחס בין שתי תת-קבוצות, שיחד הן הקבוצה כולה, קובע את היחס בין כל אחת מתת-הקבוצות לקבוצה הכוללת. אם היחס בין מספר הבנים בכיתה למספר הבנות הוא 3 : 4 אז הבנים הם $\frac{3}{7}$ מתלמידי הכיתה והבנות הן $\frac{4}{7}$ מתלמידי הכיתה. היחס בין מספר הבנים לבין כלל תלמידי הכיתה הוא 3 : 7 . היחס בין מספר הבנות לבין כלל תלמידי הכיתה הוא 4 : 7. 5. עבור יחס נתון, יש אינסוף זוגות מספרים שהיחס ביניהם הוא יחס זה. מידיעת היחס וידיעת אחד מהמספרים ניתן לקבוע בוודאות מהו המספר השני. צמצום והרחבה של יחס איננו משנה אותו. לדוגמה: בכיתה ח1 12 בנים ו- 16 בנות. בכיתה ח2 15 בנים ו- 20 בנות. בשתי הכיתות היחס בין מספר הבנים למספר הבנות הוא 3 : 4 . 6. הוספה או הורדה של אותו מספר איברים בשתי הקבוצות, משנה את היחס ביניהן (למעט כאשר היחס הוא 1 : 1). לדוגמה: בכיתה ח1 12 בנים ו- 16 בנות. לכיתה נוספים 3 בנים ו- 3 בנות. בכיתה המורחבת היחס בין מספר הבנים למספר הבנות שונה מהיחס בכיתה המקורית. 7. יש להבחין כי יחס יכול להתקיים בין גדלים מאותו סוג, כגון: יחס בין מספרי פריטים או בין אורכים, וגם בין גדלים מסוגים שונים, כגון יחס בין כמות לעלות (מחיר ליחידה) או יחס בין מרחק לזמן (מהירות). כאשר היחס הוא בין גדלים מאותו סוג אז הוא אינו משתנה כשמשנים את יחידות המידה. כאשר היחס הוא בין גדלים מסוגים שונים, אז ליחס יש יחידות מידה. **דוגמאות:** 1. בשבט של הצופים יש 2 מדריכים לכל 10 חניכים. א. מהו היחס בין מספר המדריכים לבין מספר החניכים? ב. מהו היחס בין מספר החניכים לבין מספר המדריכים?

תחום מספרי: 1. יחס, פרופורציה וקנה מידה (כולל שימושים אלגבריים) (20 שעות)	
יחס בין מספרים	2. היחס בין אורכי הניצבים במשולש ישר זווית הוא 3 : 5. מאריכים כל צלע פי 2. האם משתנה היחס בין אורכי הניצבים? אם לא - מדוע? אם כן, כתבו את היחס החדש. 3. אורכי הניצבים במשולש ישר זווית הם 6 ס"מ ו- 8 ס"מ. א. מהו היחס בין הניצבים? ב. מאריכים כל ניצב ב- 2 ס"מ. האם משתנה היחס בין אורכי הניצבים? אם לא - מדוע? אם כן, רשמו את היחס החדש.
חלוקה ביחס נתון	**חלוקה ביחס נתון היא פיצול של קבוצה נתונה לשתי תת-קבוצות כך שהיחס בין הגדלים שלהן יהיה שווה ליחס הנתון.** **דגשים:** 1. חלוקה ביחס נתון אפשרית עבור כמויות בדידות ועבור כמויות רציפות. החלוקה עבור כמויות בדידות תודגם במקרה בו ניתן לבצע בפועל את החלוקה במספרים שלמים. 2. יש לתרגל חלוקה ביחס נתון באמצעים חשבוניים ובאמצעים אלגבריים. 3. חלוקה ביחס נתון יכולה להיות מבוססת על יחס בין מספרי קבוצות הומוגניות או על יחס פנימי של איברים בקבוצות הטרוגניות (שלעתים נתפס כאינטואיטיבי יותר). יש לשים לב לכך שהשימושים שיהיו בהמשך תוכנית הלימודים לחלוקה ביחס נתון יהיו מבוססים בעיקר על יחס בין מספרי קבוצות הומוגניות. לדוגמה: חלוקת אורך קטע ביחס נתון מבוסס על מספר הפעמים שמידה משותפת מוכלת בכל אחד מהקטעים. 4. ניתן לפצל קבוצה נתונה לשלוש או יותר תת-קבוצות כך שהיחס בין הגדלים של כל שתיים מביניהן יהיה שווה ליחס נתון. כך, חלוקת קבוצה לשלוש תת-קבוצות ביחס 5 : 3 : 4 משמעה: • היחס בין הגודל של תת-קבוצה א לגודל של תת-קבוצה ב הוא 5 : 3. • היחס בין הגודל של תת-קבוצה א לגודל של תת-קבוצה ג הוא 5 : 4. • היחס בין הגודל של תת-קבוצה ב לגודל של תת-קבוצה ג הוא 3 : 4. היחס בין שלוש תת-הקבוצות, שיחד הן הקבוצה כולה, קובע את היחס בין כל אחת מתת-הקבוצות לקבוצה הכוללת. **דוגמאות:** 1. חילקו 18 כדורי משחק לשתי קבוצות של ילדים ביחס של 4 : 5. 2. חילקו 56 גולות בין אורי ודן ביחס של 2 : 5. אילו מההיגדים הבאים מתאימים לבעיה? א. על כל 2 גולות שיש לאורי, יש לדן 5 גולות.

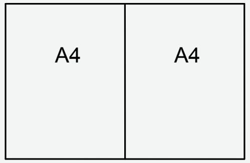
תחום מספרי: 1. יחס, פרופורציה וקנה מידה (כולל שימושים אלגבריים) (20 שעות)	
חלוקה ביחס נתון	ב. לאורי $\frac{2}{5}$ מסך כל הגולות שיש לשניהם. ג. אורי יקבל $\frac{2}{7}$ מהגולות, ודן יקבל $\frac{5}{7}$ מהגולות. ד. מכל 7 גולות שמחולקות ביחס המבוקש, לאורי יש 2 גולות ולדן יש 5 גולות. ה. מכל 7 גולות שמחולקות ביחס המבוקש, לדן יש 2 גולות ולאורי יש 5 גולות. ו. היחס בין מספר הגולות של אורי לבין מספר הגולות של דן הוא 4 : 10. 3. שותף אחד השקיע בעסקה 2,000 ש"ח וחברו השקיע 3,000 ש"ח. הוסכם שהרווח יחולק ביניהם לפי יחס ההשקעות. איך יחלקו ביניהם רווח של 1,200 ש"ח? 4. היקף מלבן הוא 40 ס"מ. היחס בין צלעותיו הוא 3 : 5. מהם אורכי הצלעות של המלבן? 5. היחס בין גודלן של שלוש הזוויות במשולש הוא 2 : 3 : 4. מה גודלה של כל אחת מהזוויות? 6. שלושה חברים יצאו לטייל, ובאחת ההפסקות התכוונו לאכול. האחד הוציא מתרמילו 4 כריכים, השני 6 כריכים אך השלישי, התברר, שכח את הכריכים בבית. הוחלט כי 10 הכריכים יחולקו שווה בשווה. כשסיימו לאכול, הוציא החבר השלישי 25₪ כדי לכסות את חלקו בהוצאות הארוחה. א. מהו היחס בין כמויות הכריכים שהביאו שלושת החברים? ב. סוכם, שכספו של החבר השלישי יחולק בין שני החברים האחרים באותו יחס כמו היחס בין מספר הכריכים שקיבל מכל אחד מהם. באיזה יחס יחלקו ביניהם שני החברים את הכסף, ומהו הסכום שיקבל כל אחד מהם?
פרופורציה	**פרופורציה היא שוויון בין יחסים.** **לערך הקבוע של היחס קוראים מקדם הפרופורציה.** **דגשים:** 1. שוויון בין יחסים משמש בחומר הלימודים של כיתה ח במספר מקרים, כגון: בדמיון משולשים, בחישובי אחוזים, בשיפוע של גרף. לגרף יש שיפוע קבוע, אם לכל בחירה של שני זוגות נקודות תתקבל הפרופורציה: $\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}=\frac{\Delta y_2}{\Delta x_2}$. 2. יש ללמוד למצוא את המספר x החסר בפרופורציות מהסוג: $\frac{x}{a}=\frac{b}{c}$, $\frac{a}{x}=\frac{b}{c}$ 3. יש לדעת להמיר פרופורציה בפרופורציה השקולה לה. לדוגמה, בקנייה במחיר קבוע ליחידה מתקבלת הפרופורציה: $\frac{\text{תשלום א}}{\text{תשלום ב}}=\frac{\text{כמות א}}{\text{כמות ב}}$ פרופורציה שקולה היא: $\frac{\text{תשלום א}}{\text{כמות א}}=\frac{\text{תשלום ב}}{\text{כמות ב}}$ 4. יישום פרופורציה באלגברה: יש לשלב פתרון משוואות עם המושג 'פרופורציה'. המשוואות צריכות לנבוע משאלות מהתחום המספרי האלגברי והגאומטרי. 5. למתקדמים: יש לפתור שאלות מילוליות המשלבות פרופורציה בהקשר של תערובות, ריכוזים ומהילה.

תחום מספרי: 1. יחס, פרופורציה וקנה מידה (כולל שימושים אלגבריים) (20 שעות)

פרופורציה

דוגמאות:

1. בכד יש 4 כוסות מים ו- $\frac{1}{2}$ כוס סוכר. כמה סוכר נשים בכד קטן יותר שמכיל 3 כוסות מים כדי לשמור על אותה מתיקות של המשקה?
2. להכנת בצק פריך דרושים 2.5 כוסות קמח, חצי כוס סוכר ושני חלמונים. מהי כמות הקמח ומהי כמות הסוכר הדרושות כדי לשמור על היחסים האלה, אם מוסיפים לתערובת חלמון נוסף?
3. היחס בין הצלע הגדולה לצלע הקטנה של גיליון מלבני A3 שווה ליחס בין הצלע הגדולה והצלע הקטנה של גיליון מלבני A4. שני גיליונות A4 המונחים זה לצד זה יוצרים גיליון A3 אחד (ראו ציור). מהו היחס בין האורך לבין הרוחב של כל גיליון?



4. במכולת נמכרים 3 סוגים של דגני בוקר.

סוג א: משקל הדגנים הוא 375 גר' וערכם האנרגטי הוא 390 קלוריות.

סוג ב: משקל הדגנים הוא 500 גר', וערכם האנרגטי הוא 540 קלוריות.

סוג ג: משקל הדגנים הוא 625 גר', וערכם האנרגטי הוא 675 קלוריות.

האם בין שלושת סוגי דגני הבוקר ישנם כאלה המקיימים פרופורציה בין מספר הקלוריות לבין משקל הדגנים?

האם קיימים שני סוגים של דגני בוקר שיחס המשקלים ביניהם שווה ליחס בין מספר הקלוריות שבהם?

5. על המדרכה ממוקם עמוד תאורה ועליו פנס בגובה 3 מ' מן המדרכה.

בערב, כאשר הפנס דולק, ואנשים עוברים על המדרכה, משתנה אורך הצל שלהם כאשר הם מתקרבים אל העמוד או מתרחקים ממנו.

אורך הצל תלוי, כמובן, גם בגובה האדם.

נסמן:

את גובה האדם (במטרים) ב-g.

את מרחקו מן העמוד (במטרים) ב-x.

את אורך הצל (במטרים) ב-y.

אפשר לחשב את אורך הצל y של האדם לפי הנוסחה הבאה: $y = \frac{g}{3-g}x$

א. מדוע הנוסחה נכונה?

ב. אנשים שונים בעלי אותו גובה עומדים במרחקים שונים מעמוד התאורה.

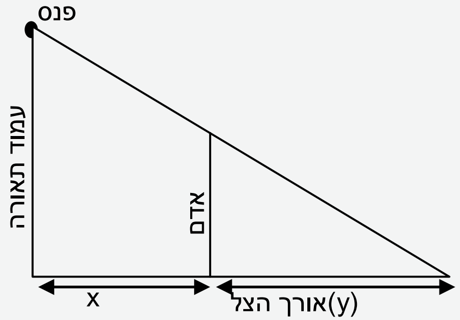
האם יש פרופורציה בין המרחק שלהם מעמוד התאורה לבין אורך הצל שלהם?

אם כן, קבעו מהו מקדם הפרופורציה.

ג. נתון כי אורך צל האדם הוא 1.5 מ' ומרחקו של האדם מהעמוד הוא מטר אחד, חשבו את גובהו.

ד. האם ייתכנו שני בני אדם בעלי גובה שונה ואורך צל שווה? נמקו.

ה. אדם בגובה 1.80 מ' הולך ליד העמוד. מה מרחקו מן העמוד כאשר אורך צילו 3 מטרים?



תחום מספרי: 1. יחס, פרופורציה וקנה מידה (כולל שימושים אלגבריים) (20 שעות)

יחס ישר

שני גדלים חיוביים משתנים, אשר היחס ביניהם קבוע, מקיימים יחס ישר.
כלומר: כאשר נתונים שני גדלים חיוביים, א ו- ב, וכאשר גודל א גדל (קטן) פי מספר מסוים, גם גודל ב גדל (קטן) פי אותו המספר (יש שוויון יחסים), בין שני הגדלים הללו מתקיים יחס ישר.

דגשים:

1. כאשר קיים יחס ישר בין שני גדלים משתנים, אז כל שני זוגות ערכים שלהם מקיימים פרופורציה.
2. למושג **יחס ישר** יש קשר לפונקציה קווית העוברת בראשית הצירים. הפונקציה $y = mx$ מייצגת יחס ישר בין שני גדלים משתנים: כאשר x גדל פי k, גדל גם y פי k. יש להדגים את הקשר בין יחס ישר לפונקציה קווית בשלל דוגמאות ובמגוון רחב של הקשרים.
3. יש לתרגל את נושא היחס הישר באמצעים חשבוניים ובאמצעים אלגבריים.

דוגמאות:

1. לפניכם רשימה של זוגות גדלים חיוביים משתנים. קיבעו לגבי כל אחד מהם האם הוא מקיים יחס ישר.
   - א. מכונית נוסעת מירושלים לתל אביב במהירות קבועה. האם קיים יחס ישר בין הזמן שחלף מאז צאתה מירושלים לבין המרחק שעברה?
   - ב. בשקית חלב יש חלב אחיד שבו 3% שומן. מוזגים את החלב לתוך כוס. האם קיים יחס ישר בין כמות השומן שבכוס לבין כמות החלב שבכוס?
   - ג. במלבן יש צלע באורך 1 ס"מ, וצלע נוספת בגודל משתנה. האם קיים יחס ישר בין אורך הצלע הנוספת לבין היקף המלבן?
   - ד. במלבן יש צלע באורך 3 ס"מ, וצלע נוספת בגודל משתנה. האם קיים יחס ישר בין שטח המלבן לבין אורך הצלע הנוספת?
   - ה. חוק בויל: בלון גמיש ממולא בגז. האם קיים יחס ישר בין נפח הגז שבבלון לבין הלחץ של הגז?
   - ו. חוק גה-ליסאק: מכל קשיח ממולא בגז. האם קיים יחס ישר בין טמפרטורת הגז שבמכל לבין הלחץ של הגז?
   - ז. בתנאים מתאימים, חיידק מתרבה באופן שהוא מתחלק לשניים בכל חצי שעה. האם קיים יחס ישר בין מספר החיידקים לבין הזמן שחלף מאז החלה חלוקת תאי החיידק?
2. אחד התלמידים בכיתה גילח את שיער ראשו. חבריו מדדו מספר פעמים את אורך שיערו הצומח, וריכזו את הנתונים בטבלה הבאה:

מספר השבועות שחלפו מיום גילוח השיער	2	3	5	8	9	10
אורך השיער במילימטרים	12	18	30	48	54	60

   1. הכינו מערכת צירים מתאימה, וסמנו עליה נקודות המתאימות לנתונים שבטבלה.
   2. האם קיים יחס ישר בין אורך השיער לבין מספר השבועות שחלפו מיום גילוח השיער?
   3. האם לדעתכם ניתן להוסיף את נקודת החיתוך של שני הצירים לקבוצת הנקודות שמתארות את גידול השיער? נמקו את תשובתכם.
   4. האם ניתן ללמוד מהנתונים על קצב הגדילה של השיער? אם כן, מצאו את קצב הגדילה של השיער.

תחום מספרי: 1. יחס, פרופורציה וקנה מידה (כולל שימושים אלגבריים) (20 שעות)

קנה מידה

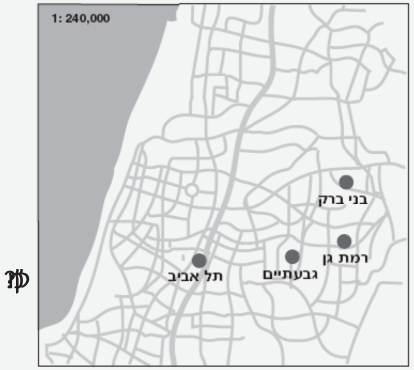
קנה מידה הוא יחס בין גודל בשרטוט או בדגם לבין גודל במציאות.

דגשים:

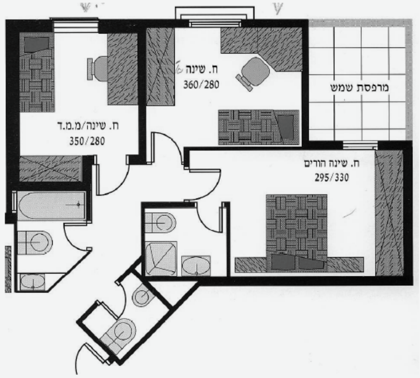
1. מקובל לרשום קנה מידה כיחס שאחד המספרים בו הוא 1: בהקטנה - רשום 1 מצד שמאל, ובהגדלה - רשום 1 מצד ימין. בכתיבת קנה מידה נמדדים שני האגפים באותה יחידת מידה. למשל, אם כל שני ס"מ במפה מייצגים קילומטר אחד במציאות, ייכתב קנה המידה בצורה: 1 : 50,000.
2. יש לדעת לשרטט שרטוט פשוט על פי קנה מידה.
3. יש למצוא קנה מידה על פי מידות נתונות בשרטוט ובמציאות, יש למצוא גודל במציאות על פי קנה המידה והגודל שנמדד בשרטוט, ויש למצוא גודל בשרטוט על פי קנה המידה והגודל הנתון שבמציאות.
4. התרגילים יכללו המרות של יחידות אורך.
5. שרטוט מצולע בקנה מידה מדגים דמיון מצולעים.

דוגמאות:

1. במוזיאון מוצג מודל כדור הארץ. הקוטר של כדור הארץ במודל שווה למטר אחד.
   במציאות, קוטר כדור הארץ הוא כ- 12,500 ק"מ.
   א. מהו קנה המידה של המודל?
   ב. מהו היקף כדור הארץ במציאות ומהו ההיקף במודל?
   ג. מהו אורך הגבול של מדינה מסוימת במודל, אם אורך הגבול שלה במציאות הוא 1,000
   ד. כתבו ביטוי אלגברי המאפשר למצוא את אורך הגבול של מדינה כלשהי במודל הזה, אם ידוע אורך הגבול שלה במציאות.
2. בנימין גר בבני ברק, רינה ברמת גן, גדעון בגבעתיים ותמר גרה בתל אביב.
   מהו המרחק בקו אווירי:
   א. מביתו של בנימין לביתה של תמר?
   ב. מביתו של גדעון לביתה של תמר?
   ג. מביתה של רינה לביתו של גדעון?



3. השרטוט שלפניכם הוא תוכנית של דירה.
   ענו על השאלות על פי השרטוט.
   א. מהו אורך השרטוט של חדר השינה המרכזי?
   ב. מהו רוחב השרטוט של חדר השינה המרכזי?



תחום מספרי: 1. יחס, פרופורציה וקנה מידה (כולל שימושים אלגבריים) (20 שעות)	
קנה מידה	ג. מהו שטח השרטוט של חדר השינה המרכזי? ד. מהו השטח (במציאות) של מרפסת השמש? ה. מהו קנה המידה של התכנית? 4. לקראת המכרז על הקמת מבנה חדש באתר מגדלי התאומים, נבנה דגם של אחת ההצעות בקנ"מ של 1:500. א. פי כמה גדול רוחב הבניין במציאות מגודלו בדגם? ב. פי כמה גבוה הבניין במציאות מגובהו בדגם? ג. פי כמה גדול שטח הבניין במציאות מגודלו בדגם? ד. פי כמה גדול נפח הבניין במציאות מגודלו בדגם? 5. לפניכם תמונה מוגדלת של חיפושית. אורך גוף החיפושית במציאות הוא 0.6 ס"מ ובסרטוט הוא 6 ס"מ. א. היחס בין אורך החיפושית בתמונה **המוגדלת** לאורך החיפושית במציאות? ב. מהו קנה המידה שבו משורטטת החיפושית? 
יחס הפוך	**שני גדלים חיוביים משתנים, אשר המכפלה שלהם קבועה, מקיימים יחס הפוך.** **כלומר: כאשר נתונים שני גדלים חיוביים, א ו- ב, כך שכשגודל א גדל (קטן) פי מספר מסוים, גודל ב קטן (גדל) פי אותו המספר, אז בין שני הגדלים יש יחס הפוך.** **דגשים:** 1. יחס הפוך נלמד בשלב זה בשל נגישות התלמידים לתופעות המיוצגות בעזרת יחס הפוך, וכדי שהתלמידים יהיו מודעים כבר משלב זה שלא כל קשר בין שני גדלים מתאפיין באמצעות יחס ישר. 2. הפונקציה $y = \frac{k}{x}$ מייצגת יחס הפוך: הקשר בין ערכי x ו- y הוא כזה שמכפלתם קבועה ואינה 0, $0 \neq k$ $xy = k$. **דוגמאות:** 1. יואב ויאיר יצאו מארזים והגיעו לאשלים. יואב צעד ברגל במהירות קבועה במשך 9 שעות, יאיר רכב על אופניו במהירות קבועה במשך 3 שעות. פי כמה הייתה מהירותו של יאיר גדולה ממהירותו של יואב? 2. שני אנשים מכניסים 200 מכתבים למעטפות במשך חצי שעה. א. בכמה זמן יכניס אדם אחד, העובד באותו הקצב, 200 מכתבים למעטפות? ב. בכמה זמן יכניסו 4 אנשים, העובדים באותו הקצב, 200 מכתבים למעטפות? ג. בכמה זמן יכניסו 6 אנשים, העובדים באותו הקצב, 200 מכתבים למעטפות? ד. בכמה זמן יכניסו 10 אנשים, העובדים באותו הקצב, 200 מכתבים למעטפות?

תחום מספרי: 1. יחס, פרופורציה וקנה מידה (כולל שימושים אלגבריים) (20 שעות)	
יחס הפוך	3. שטחו של מלבן הוא 40 סמ"ר. הציעו מספר אורכים אפשריים לאורך שתי הצלעות של מלבן זה. א. שרטטו גרף שבו מתואר הקשר בין האורכים של שתי צלעות המלבן. ב. מה ניתן ללמוד מהגרף? 4. הסבירו מדוע יש יחס הפוך בין הזמן שלוקח לאדם לעבור 100 מ' ובין מהירות ההליכה שלו.

תחום גאומטרי: 1. משולשים חופפים, תיכון ומשולש שווה שוקיים (קדם דדוקטיבי) (14 שעות)

נושאי הלימוד	דגשים ודוגמאות
משולשים חופפים	מטרת הפרק היא להכיר את שלושת משפטי החפיפה הראשונים, להצדיק את נכונותם וללמוד להסיק שוויון של צלעות וזוויות מתוך ידיעה ששני משולשים הם חופפים. בפרק זה נכונות משפטי החפיפה תודגם באמצעים קדם-דדוקטיביים, וללא הוכחות פורמליות. **שני משולשים נקראים 'חופפים' אם אפשר להניח את אחד מהם על האחר כך שיכסה אותו בדיוק (ולשם כך ניתן להזיז, לסובב ולהפוך את המשולשים).** **דגשים:** 1. שני משולשים שלהם שני נתונים חופפים (למשל שתי צלעות או צלע וזווית) אינם בהכרח חופפים. 2. שני משולשים שזוויותיהם שוות אינם בהכרח חופפים. 3. משפטי החפיפה: א. **חפיפה על פי צלע-זווית-צלע:** אם שתי צלעות במשולש אחד שוות לשתי צלעות במשולש אחר, וגם הזוויות הכלואות בין הצלעות שוות זו לזו, אז המשולשים חופפים. יש להדגים באופן מוחשי את העובדה שאם הזוויות השוות אינן כלואות בין הצלעות השוות אז המשולשים אינם בהכרח חופפים. ב. **חפיפה על פי זווית-צלע-זווית:** אם שתי זוויות במשולש אחד שוות לשתי זוויות במשולש אחר, וגם הצלעות הנמצאות בין הזוויות שוות זו לזו, אז המשולשים חופפים. ג. **חפיפה על פי צלע-צלע-צלע:** אם שלוש צלעות במשולש אחד שוות לשלוש צלעות במשולש אחר אז שני המשולשים חופפים. 4. יש לנמק את נכונות שלושת משפטי החפיפה באמצעים מוחשיים. 5. יש ללמוד לזהות משולשים חופפים על פי שלושה נתונים מתאימים. 6 בהינתן משולשים חופפים, יש לדעת לזהות צלעות וזוויות מתאימות: • מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות. • מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות. 7. יש לעסוק בבעיות המשלבות בין משפטי החפיפה לבין עובדות שנלמדו בכיתה ז. **דוגמאות:** 1. א. נתונות שתי צלעות. האם ניתן לבנות שני משולשים שאינם חופפים שלהם שתי צלעות אלה? ב. נתונות שלוש זוויות. האם ניתן לבנות שני משולשים שאינם חופפים שלהם שלוש הזוויות האלה?

תחום גאומטרי: 1. משולשים חופפים, תיכון ומשולש שווה שוקיים (קדם דדוקטיבי) (14 שעות)

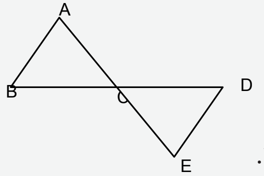
משולשים חופפים

ג. נתונות שתי צלעות והזווית הכלואה ביניהן.
האם ניתן לבנות שני משולשים שאינם חופפים שלהם נתונים אלה?

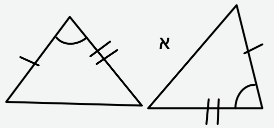
ד. נתונות שתי זוויות והצלע שבין קודקודיהן.
האם ניתן לבנות שני משולשים שאינם חופפים שלהם נתונים אלה?

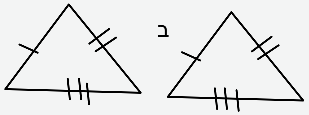
ה. נתונות שלוש צלעות.
האם ניתן לבנות שני משולשים שאינם חופפים שלהם צלעות אלה?

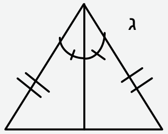
2. משולשים ABC ו-EDC חופפים זה לזה.
נתון: BC = CD.
א. איזו צלע במשולש EDC שווה לצלע AC?
ב. האם זווית A שווה לזווית E או לזווית D? נמקו.

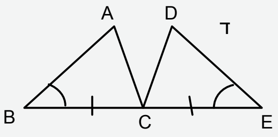


3. נתונים זוגות של משולשים. קבעו באילו מהזוגות המשולשים חופפים, ולפי איזה משפט (צלעות וזוויות שוות מסומנות באיור).
אם המשולשים אינם חופפים יש להביא דוגמה נגדית עם מידות קונקרטיות (באמצעות סרגל ומד זווית):

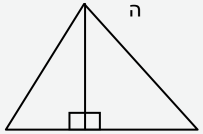
א


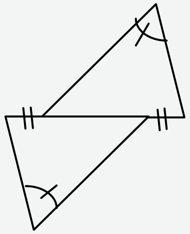
ב


ג


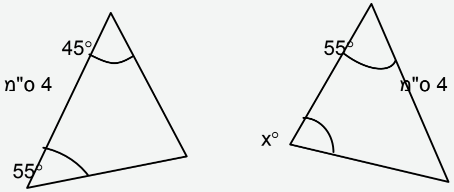
ד


ACE = ∡DCB∡

ה


ו


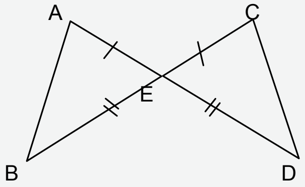
4. המשולשים בשרטוט הם משולשים חופפים. חלק מהמידות רשומות על גבי השרטוט. מהו ערכו של x?



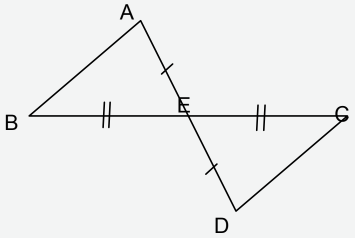
תחום גאומטרי: 1. משולשים חופפים, תיכון ומשולש שווה שוקיים (קדם דדוקטיבי) (14 שעות)

משולשים חופפים

5. לפניכם שני שרטוטים*. הנתונים כתובים מתחת לשרטוטים.
באילו מהשרטוטים אפשר להסיק כי ∢D = ∢B? נמקו.



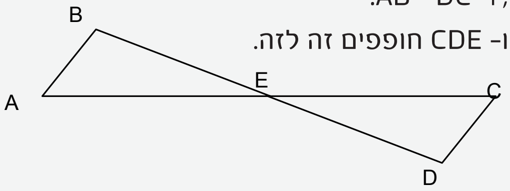
נתון: AE = CE, BE = DE



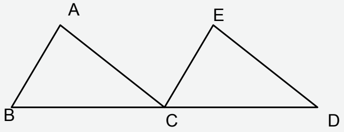
נתון: AE = DE, BE = CE

* לקוח ממיצ"ב תשס"ג.

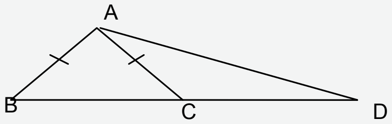
6. באיור הבא נתון כי: AB || DC, ו- AB = DC.
נמקו מדוע המשולשים ABE ו- CDE חופפים זה לזה.
השלימו ונמקו:
AE = __________
BE = __________

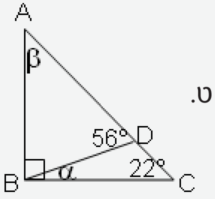
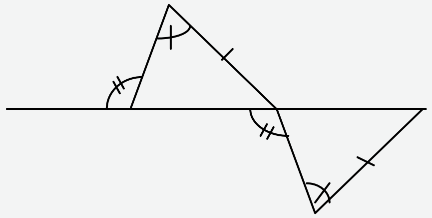
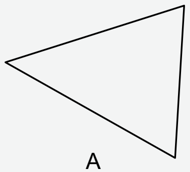
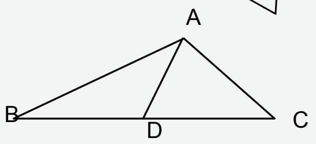


7. לפניכם שני משולשים: ABC ו-ECD.
נתון: AB || EC, ED || AC, C אמצע הקטע BD.
קבעו אם המשולשים חופפים, ואם כן, ציינו לפי איזה משפט ולפי אילו נימוקים.
השלימו: ______ = AB = ______, AC
נמקו את קביעתכם.



8. המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים: AB = AC. הנקודה D ממוקמת על המשך הצלע BC.
א. כתבו את כל השוויונות המתקיימים בין צלעות וזוויות במשולשים ABD ו- ACD.
ב. המשולשים ABD ו- ACD אינם חופפים. האם אין פה סתירה למשפט החפיפה על סמך שתי צלעות וזווית? נמקו את תשובתכם.



תחום גאומטרי: **1. משולשים חופפים, תיכון ומשולש שווה שוקיים (קדם דדוקטיבי) (14 שעות)**	
זווית חיצונית למשולש	**זווית חיצונית למצולע קמור היא זווית הצמודה לזווית פנימית.** **דגש:** זווית חיצונית למשולש משלימה ל 180° את הזווית הפנימית הצמודה לה, ולכן שווה לסכום הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה. **דוגמאות:**  1. נתון משולש ישר זווית ABC. D נקודה על הצלע AC. א. חשבו את גודל הזוויות a, b על פי הנתונים בשרטוט. ב. נמקו כל שלב בחישוב. 2. נמקו מדוע המשולשים הנתונים חופפים. 
תיכון במשולש	**תיכון במשולש הוא קטע המחבר קודקוד לאמצע הצלע שמולו.** **דגשים:** 1. הקטע **תיכון** נוסף לקטעים **גובה** ו**חוצה זווית** שנלמדו בכיתה ז. 2. יש לעסוק בשרטוטים, מדידות וחישובים המשלבים את התיכון במשולש. 3. יש לנמק מדוע התיכון מחלק את המשולש לשני משולשים שווי שטח. **דוגמאות:**  1. מדדו את צלעות המשולש שלפניכם ושרטטו את שלושת התיכונים שלו: 2. במשולש ABC, AD תיכון לצלע BC. הצלע AB גדולה מהצלע AC ב-2 ס"מ. בכמה ס"מ גדול היקף משולש ABD מהיקף משולש ADC? נמקו. למי משני המשולשים: ABD או ADC, שטח גדול יותר, ובכמה סמ"ר? 

תחום גאומטרי: 1. משולשים חופפים, תיכון ומשולש שווה שוקיים (קדם דדוקטיבי) (14 שעות)

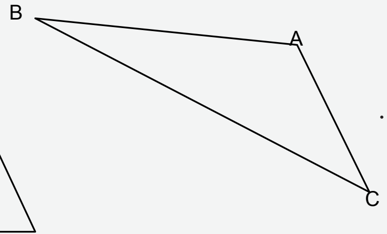
תיכון במשולש

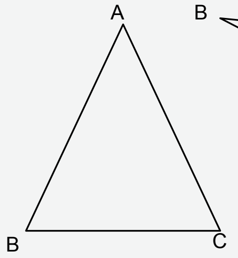
3. שרטטו את הקטעים הבאים במשולשים שלפניכם:

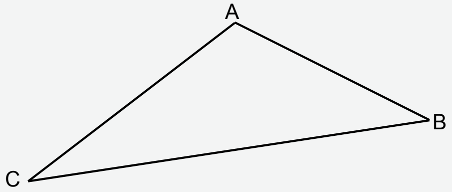
AD גובה לצלע BC.

AP חוצה זווית A.

AM תיכון לצלע BC.





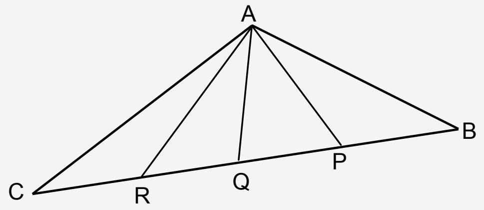


4. האם תיכון במשולש מחלק את המשולש לשני משולשים חופפים? נמקו.

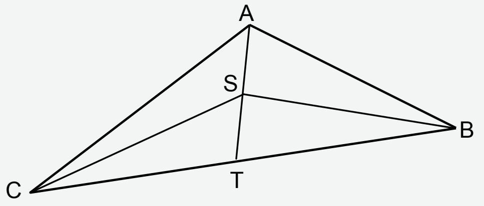
5. משימה: ירושת קרקע.

אב הוריש לארבעת בניו חלקת קרקע מישורית שצורתה משולש שקדקודיו הם A, B, C וציווה עליהם לחלקה ביניהם לארבעה שטחים שווים.
כל אחד מהבנים הציע דרך מקורית לחלוקת השטח.

א. ראובן הציע לחלק את הצלע BC לארבעה קטעים שווים. את נקודות החלוקה, P, Q ו-R מחברים עם הקדקוד A כך שנוצרים ארבעה משולשים בתוך המשולש המקורי (ראה שרטוט).
קבעו האם הצעתו של ראובן מחלקת את השטח לארבעה חלקים שווים, ונמקו את תשובתכם.



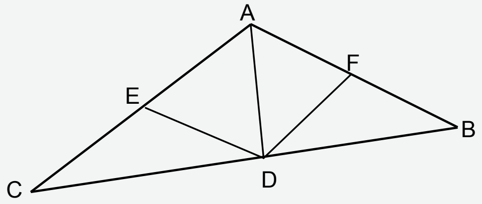
ב. שמעון הציע להעביר מהקדקוד A תיכון AT לצלע BC. מהנקודה S שבמחצית התיכון AT מתח שמעון שני קווים לעבר הקדקודים B, ו-C (ראו שרטוט). קבעו האם הצעתו של שמעון מחלקת את השטח לארבעה חלקים שווים, ונמקו את תשובתכם.



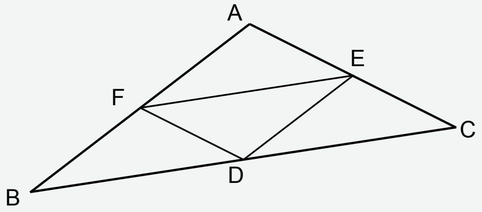
תחום גאומטרי: 1. משולשים חופפים, תיכון ומשולש שווה שוקיים (קדם דדוקטיבי) (14 שעות)

תיכון במשולש

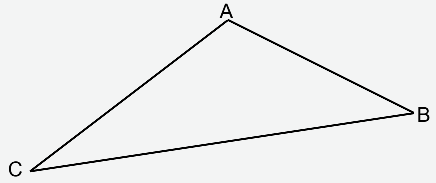
ג. לוי הציע לשרטט גובה AD לצלע BC, ושני תיכונים DE ו-DF לצלעות AC ו-AB. קבעו האם הצעתו של לוי מחלקת את השטח לארבעה חלקים שווים, ונמקו את תשובתכם.



ד. יהודה הציע לחבר את שלושת אמצעי צלעות המשולש זה עם זה (ראו שרטוט).
קבעו האם הצעתו של יהודה מחלקת את השטח לארבעה חלקים שווים, ונמקו את תשובתכם.

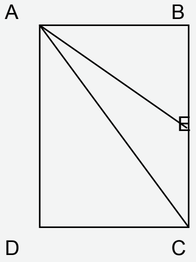


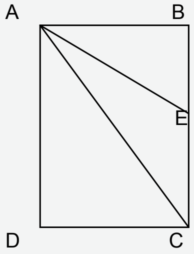
ה. הציעו חלוקה אחרת.



6. בשרטוט שלפניכם מלבן ABCD. AC אלכסון במלבן, ו-AE תיכון במשולש ABC.
א. מה היחס בין שטחי המשולשים ABE ו-ADC?
ב. איזה חלק משטח המלבן מהווה משולש AEC?

7. בשרטוט שלפניכם מלבן ABCD. AC אלכסון במלבן, ו-AE חוצה זווית CAB במשולש ABC.
$\sphericalangle EAC = \alpha$
הסבירו בשתי דרכים שונות מדוע $\sphericalangle ABE = 90° - \alpha$.





תחום גאומטרי: 1. משולשים חופפים, תיכון ומשולש שווה שוקיים (קדם דדוקטיבי) (14 שעות)

משולש שווה שוקיים

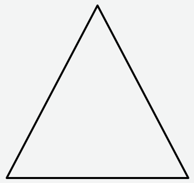
משולש שווה שוקיים: משולש ששתיים מצלעותיו שוות זו לזו. הצלעות השוות נקראות ׳שוקיים׳ והצלע השלישית נקראת ׳בסיס׳. הזוויות שמול השוקיים נקראות ׳זוויות הבסיס׳. הזווית שמול הבסיס נקראת ׳זווית הראש׳.

דגשים:

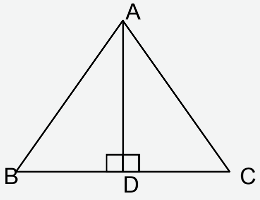
1. התרגול יעסוק בשרטוטים, מדידות וחישובים.
2. נושא זה מאפשר ליישם את משפטי החפיפה של משולשים.
3. תכונות המשולש שווה השוקיים יוסקו בשלב ראשון מתוך התבוננות המבוססת על סימטרייה. נימוק התכונות יתבסס על חפיפת משולשים. כתיבת הנימוקים תיעשה בשלב זה באופן לא פורמאלי.
4. התרגול במשולש שווה השוקיים ישולב עם תרגילים במשולשים שאינם שווי שוקיים.
5. התלמידים יכירו וינמקו באמצעות חפיפת משולשים שתי תכונות של משולש שווה שוקיים:
   א. במשולש שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות זו לזו.
   ב. במשולש שווה שוקיים חוצה זווית הראש, הגובה לבסיס והתיכון לבסיס מתלכדים.

דוגמאות:

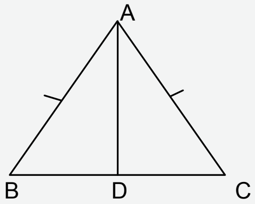
1. מדדו את גודל הזוויות במשולש הנתון בעזרת מד זווית:



2. לפניכם משולש שווה שוקיים. AD גובה לבסיס BC. זוויות B ו–C שוות זו לזו וגודלן 42°.
   א. מה גודלן של הזוויות DAB ו- DAC?
   ב. נמקו בעזרת חפיפת משולשים מדוע AD הוא גם תיכון למשולש.



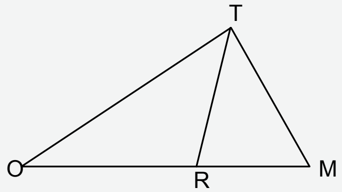
3. במשולש שווה השוקיים שלפניכם AB=AC ו–AD חוצה זווית A. $\sphericalangle A = \alpha$
   א. אילו משולשים חופפים זה לזה? מהו משפט החפיפה שלפיו קבעתם שהמשולשים חופפים?
   ב. השלימו
   ∢B = ______
   ∢BDA = _______ = _____°
   BD = ________
   השלימו את המשפט:
   במשולש שווה שוקיים חוצה זווית הראש
   מתלכד עם ____________________.
   ועם ה_______________________.



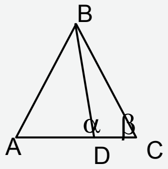
תחום גאומטרי: 1. משולשים חופפים, תיכון ומשולש שווה שוקיים (קדם דדוקטיבי) (14 שעות)

משולש שווה שוקיים

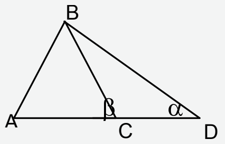
4. נתון משולש TOM. ‏TR חוצה זווית T. מדדו וקבעו האם TR הוא תיכון לצלע MO.
מדדו וקבעו האם TR הוא גובה לצלע MO.



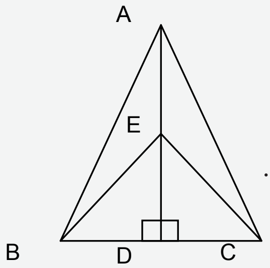
5. האם כל המשולשים שווי השוקיים ששוקיהם באותו האורך חופפים זה לזה?
6. הייתכן שזווית הבסיס במשולש שווה שוקיים תהייה חדה? נמקו.
הייתכן שזווית הבסיס במשולש שווה שוקיים תהייה ישרה? נמקו.
הייתכן שזווית הבסיס במשולש שווה שוקיים תהייה קהה? נמקו.
7. א. המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים. D נקודה על הבסיס AC.
הסבירו מדוע $\alpha > \beta$.



ב. המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים. D נקודה על המשך הבסיס AC.
הסבירו מדוע $\alpha < \beta$.



8. משולש ABC הוא שווה שוקיים $(AB = AC)$, $AD\perp CB$
היעזרו בחפיפת משולשים לנמק מדוע משולש BEC הוא משולש שווה שוקיים.

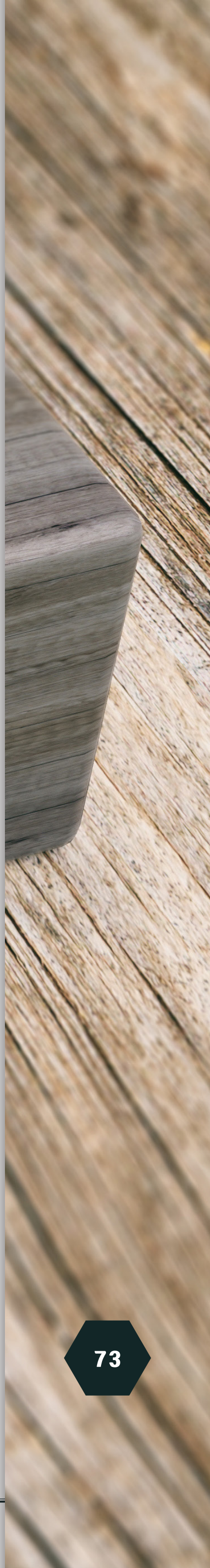


סבב 2

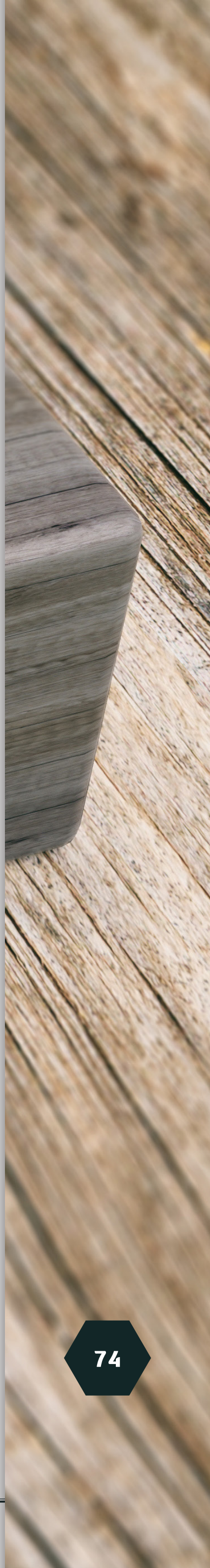
תחום אלגברי	תחום מספרי	תחום גאומטרי
פתרון משוואות ממעלה ראשונה (העמקה), שאלות מילוליות מתאימות וטכניקה אלגברית (20 שעות)	**אחוזים, סטטיסטיקה והסתברות** (30 שעות)	**דמיון מצולעים** (12שעות)

<table>
<tr><th colspan="2">תחום אלגברי: 2. פתרון משוואות ממעלה ראשונה (העמקה), שאלות מילוליות מתאימות וטכניקה אלגברית (20 שעות)</th></tr>
<tr><th>נושאי הלימוד</th><th>דגשים ודוגמאות</th></tr>
<tr><td>**פתרון משוואות ממעלה ראשונה ושאלות מילוליות מתאימות (העמקה)**</td><td>**דגשים:**
1. בכיתה ז למדו התלמידים לפתור משוואות ממעלה ראשונה ולפתור שאלות מילוליות שניתנות לפתרון באמצעות פתרון משוואות ממעלה ראשונה.
2. בפרק זה מעמיקים בטכניקה האלגברית, ולומדים לפתור גם משוואות המכילות שברים אלגבריים, ושניתן להביא אותן לצורה מוכרת של משוואה ממעלה ראשונה. (בשלב זה, מומלץ להימנע מעיסוק במשוואות שבהן הרחבת השברים נותנת איברים ריבועיים, גם אם אלה מתבטלים לבסוף.)
3. יש ללמוד למצוא את **תחום ההצבה** של ביטויים הכוללים שברים אלגבריים.
4. יש לעסוק גם במשוואות ממעלה ראשונה שאין להן פתרון, או שלהן מספר אינסופי של פתרונות.
5. בהתאם לכך, התלמידים ילמדו לפתור שאלות מילוליות שניתנות לפתרון באמצעות משוואות שאותן למדו לפתור.
6. יש לנצל את הידע של פתרון משוואות כדי לפתור מצבים שבהם מתוארות שתי פונקציות ומחפשים את ערכי ה-x שבהם הן שוות.

דוגמאות:
1. פתרו את המשוואות הבאות:
א. $\frac{2x-1}{4}-\frac{6x+7}{3}=x$ ב. $\frac{x-3}{2}+\frac{5-2x}{2}=1\frac{1}{2}$
2. פתרו את המשוואות הבאות, ודאו שהפתרונות הם בתחום ההצבה:
א. $\frac{x}{x+3}=5$ ב. $\frac{2}{x}+\frac{3}{7}=4$ ג. $\frac{2}{x+3}=\frac{1}{x}$
3. פתרו את המשוואה: $2x + 4 = 2(x - 5)$.
4. מצאו מספר שהיחס בינו ובין מספר הגדול ממנו ב-3 הוא 7 : 8.
5. מצאו מספר x שונה מאפס שאם נוסיף לו 3, נכפול את הסכום פי 2, נחסר מהמכפלה 6, ונחלק את התוצאה שהתקבלה במספר שבחרנו, תתקבל התוצאה הסופית: 2.</td></tr>
</table>



תחום אלגברי: 2. פתרון משוואות ממעלה ראשונה (העמקה), שאלות מילוליות מתאימות וטכניקה אלגברית (20 שעות)	
פתרון משוואות ממעלה ראשונה ושאלות מילוליות מתאימות (העמקה)	6.* רוכב אופניים רכב בעלייה מעפולה אל פסגת הר תבור במהירות קבועה של 12 קמ"ש. כשירד מפסגת הר תבור אל עפולה, הוא רכב באותה הדרך במהירות קבועה של 36 קמ"ש. בסך הכל, הלוך וחזור, הוא רכב שעתיים. כמה זמן רכב רוכב האופניים מעפולה אל פסגת הר תבור? נמקו את תשובתכם בתרגיל או במילים. * לקוח ממיצ"ב תשע. 7. תייר מזדלנד רצה להמיר את כספו. בבנק א' הציעו לו 0.4₪ עבור כל זד שרוצה למכור אך עליו לשלם עמלה של 5 שקלים לבנק. בבנק ב' הציעו לו 0.6₪ עבור כל זד שרוצה למכור אך עליו לשלם עמלה של 10 שקלים לבנק. כמה זדים עליו למכור כדי לקבל בשני הבנקים אותו סכום בשקלים?
טכניקה אלגברית	בפרק זה ילמדו התלמידים טכניקות אלגבריות חדשות. מטרת הלימוד היא העשרת "ארגז הכלים" של התלמיד, כדי לאפשר פתרון מגוון רחב יותר של שאלות מילוליות, וכדי לאפשר פישוט ביטויים אלגבריים. **דגשים:** 1. יש ללמוד להשתמש בחוק הפילוג לקבלת זהויות מהצורה: $(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$. 2. יש להמחיש את חוק הפילוג המורחב באמצעות שטחי מלבנים, הן במקרה של חיבור והן במקרה של חיסור. 3. יש ללמוד להוציא גורם משותף ברב-איבר. 4. יש ללמוד לצמצם שברים אלגבריים באמצאות הוצאת גורם משותף, ויש ללמוד למצוא את תחום ההצבה של ביטוי אלגברי. 5. מכפלה שווה לאפס אם ורק אם לפחות אחד מגורמיה הוא 0. שבר שווה לאפס אם ורק אם המונה שלו שווה ל- 0 (המכנה חייב תמיד להיות שונה מ- 0). 6. יש ללמוד לפתור משוואות ריבועיות מהצורה $ax2 + bx = 0$. (בשלב זה, מומלץ לעסוק במשוואות שבהן הרחבת השברים נותנת איברים ריבועיים שמתבטלים לבסוף.) **הערה:** ניתן לפזר את הלימוד בטכניקה האלגברית לאורך שנת הלימודים, ולשלבה בנושאים אחרים. **דוגמאות:** 1. א. פתחו את הסוגריים בביטוי הבא: $(x - 2)(4 - x)$ ב. פתרו את המשוואה: $(x - 2)(4 - x) = 6 - x2$ 2. נתון ריבוע שאורך צלעו x ס"מ. א. מהו הביטוי האלגברי המתאר את שטחו של הריבוע? ב. הגדילו את האורך של כל אחת מהצלעות ב- 3 ס"מ. מהו הביטוי האלגברי המתאר את שטח הריבוע החדש? ג. כתבו ביטוי אלגברי של פונקציה המתארת בכמה גדל שטח בריבוע כתלות ב-x.



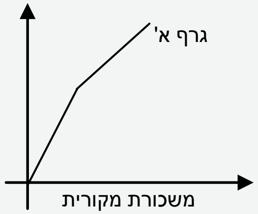
תחום אלגברי: 2. פתרון משוואות ממעלה ראשונה (העמקה), שאלות מילוליות מתאימות וטכניקה אלגברית (20 שעות)	
טכניקה אלגברית	3. נתון מלבן שאורך צלע אחת שלו גדול פי 2 מאורך הצלע שנייה. א. מהו הביטוי האלגברי המתאר את שטחו של המלבן? ב. קיצרו את האורך של זוג הצלעות הנגדיות הארוכות ב-6 ס"מ, והאריכו את האורך של שתי הצלעות האחרות ב-5 ס"מ. מהו הביטוי המתאר את שטחו של המלבן שנוצר? עבור אילו ערכים של x יש לביטוי זה משמעות בהקשר לשאלה זו? ג. שטח המלבן שנוצר קטן ב-14 סמ"ר מהשטח של המלבן המקורי. מהו היקף המלבן המקורי? 4. א. בכל אחד מהביטויים האלגבריים הבאים, קבעו האם יש ערכים של המשתנה שעבורם הביטוי אינו מוגדר, וצמצמו את הביטוי: א. $\frac{x^2-5x}{2x-10}$ ב. $\frac{4x^3-2x^2}{2x^2}$ ג. $\frac{m^3-m^2}{1-m}$ ד. $\frac{3x^2+12}{x^2+4}$ ה. $\frac{5x-10}{x^2-2x}$ ב. הסבירו מדוע הביטוי שהתקבל לאחר הצמצום איננו שווה לביטוי שהיה לפני הצמצום. עבור אילו ערכים של x הביטויים שווים? 5. פתרו את המשוואות הבאות: א. $x^2+7x=0$ ב. $\frac{x^2+5x}{x+5}=0$

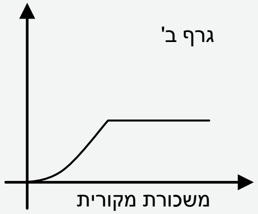
תחום מספרי: 2. אחוזים, סטטיסטיקה והסתברות (כולל שימושים אלגבריים) (30 שעות)	
נושאי הלימוד	**דגשים ודוגמאות**
אחוזים	אחוזים נלמדים כבר בבית הספר היסודי, וכאן מוצג סבב למידה נוסף שנועד לחזור על הנושא, תוך העמקה ועם קישור לתחום האלגברי. הנושא מקושר לפתרון שאלות מילוליות, שכיחות יחסית והסתברות. **המושג 'אחוז' והשימוש בו.** **אחוז הוא מאית מכמות נתונה.** **דגשים:** 1. אחוז מייצג חלק מכמות. לעומתו, לשבר מגוון משמעויות, שרק אחת מהן, חלק מכמות, מתאימה למשמעות של אחוז. 2. יש להשתמש באחוזים במצבים סטטיים (החלק היחסי של כמות מתוך כמות כוללת), ובמצבים דינמיים (הקטנה/הגדלה, או הוזלה/התייקרות). 3. יש לפתח יכולת אומדן בשימוש באחוזים שגרתיים כגון 10% של כמות, 20%, 25%, 50%, 100%, או 200%. 4. יש לפתח תובנה חשבונית לשימוש באחוזים באמצעות הדגשת היסוד הכיפלי של שימוש באחוזים. לדוגמה, גידול של 25% שקול לכפל פי 1.25. 5. יש לבסס, על סמך היסוד הכיפלי של שימוש באחוזים, את חוק החילוף בשני תהליכים עוקבים כגון: הוזלה כפולה, התייקרות כפולה, או הוזלה והתייקרות. 6. יש להשתמש בפרופורציה המבטאת את הקשר בין ארבעת הגדלים: $\frac{\text{מספר האחוזים}}{100} = \frac{\text{ערך האחוז}}{\text{הכמות}}$ 7. יש לפתור שאלות מילוליות המשלבות אחוזים בחשבון ובאלגברה במגוון הקשרים. 8. למתקדמים: יש לפתור שאלות מילוליות המשלבות אחוזים בחשבון ובאלגברה בהקשר של תערובות, ריכוזים ומהילה. **דוגמאות:** 1. בכנס 200 משתתפים. 48% מהמשתתפים הצביעו בעד החלטה. בעד ההחלטה הצביעו: א. רוב המשתתפים ב. קרוב לחצי מהמשתתפים ג. 48 אנשים ד. לא ניתן לדעת 2. בכיתה ח1 25 תלמידים. 60% מהתלמידים חברים בתנועות נוער. כמה תלמידים חברים בתנועות נוער?

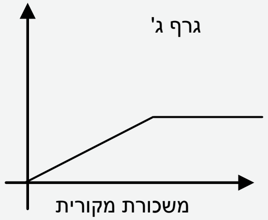
תחום מספרי: 2. אחוזים, סטטיסטיקה והסתברות (כולל שימושים אלגבריים) (30 שעות)

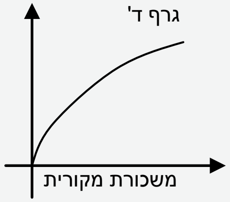
אחוזים

3. א. כרטיס קולנוע התייקר מ- 35 שקלים ל- 37.80 שקלים.
   בכמה אחוזים התייקר כרטיס הקולנוע?
   ב. כעבור שנה, הורידו את מחיר הכרטיס בחזרה ל- 35 שקלים. בכמה אחוזים הוזל הכרטיס?
4. נתון ריבוע. אם נגדיל שתי צלעות נגדיות שלו ב 15% נקבל מלבן שהיקפו גדול ב- 6 ס"מ מהיקף הריבוע. מה אורך צלע הריבוע? מה שטח הריבוע? מה שטח המלבן המוגדל?
5. נתון ריבוע. נגדיל שתי צלעות נגדיות שלו ב 25%, ואת שתי הצלעות הנותרות נקטין ב- 25%, כך שמתקבל מלבן.
   א. האם היקף המלבן גדול, קטן או שווה להיקף הריבוע?
   ב. האם שטח המלבן גדול, קטן או שווה לשטח הריבוע?
6. היקף מלבן הוא 100 ס"מ. אורך צלע אחת במלבן הוא 20% מהיקפו.
   בכמה ס"מ יש לקצר את הצלע כדי שאורכה יהיה 10% מההיקף המקוצר?
7. בשני אולמות קולנוע יש בסך הכל 240 צופים. אם 20% מהצופים באולם א יעברו לאולם ב, יהיה מספר הצופים בשני האולמות שווה.
   כמה צופים יש בכל אולם?
8. בחלב יש 3% שומן. הוסיפו לחלב 100 גרם מים, כך שאחוז השומן קטן ל-2% מהחלב המהול. מה היה משקל החלב לפני התוספת?
9. חברת ברק, העוסקת בהפניית עובדי ניקיון לעבודה בקבלנות, מפרסמת:
   עובדים המוכנים לעבוד במשמרות, יקבלו אצלנו תוספת בשיעור של 20% מהמשכורת, עד לתוספת של 800 ש"ח לכל היותר.
   לפניכם 4 גרפים אשר רק שניים מהם מתאימים לתנאים הבאים:
   א. התאימו גרף המתאר את התוספת בשקלים למשכורת המוגדלת, כפונקציה של המשכורת המקורית.
   ב. התאימו גרף המתאר את המשכורת המוגדלת בשקלים (בעקבות התוספת), כפונקציה של המשכורת המקורית.
   נמקו את בחירתכם.









תחום מספרי: 2. אחוזים, סטטיסטיקה והסתברות (כולל שימושים אלגבריים) (30 שעות)

אחוזים

10. מהכסף שהיה לי בארנק הוצאתי 17% על ספרים ו- 18% על ארוחה. הוצאתי על הארוחה 5 שקלים יותר מאשר על הספרים. כמה כסף היה לי בארנק?
11. מה כדאי יותר לקונה? תוספת במחיר של a אחוזים, ואח"כ הנחה של b אחוזים, או להיפך?
12. בכמה אחוזים התייקר מוצר, אם את המחיר לאחר ההתייקרות אפשר לחשב על ידי הכפלת המחיר (שלפני ההתייקרות) ב- 1.2?
13. בכמה אחוזים הוזל מוצר, אם את המחיר לאחר ההוזלה אפשר לחשב על ידי הכפלת המחיר (שלפני ההתייקרות) ב- 0.9?

שתי הדוגמאות הבאות לקוחות ממאגר שאלות מטעם המועצה הישראלית לצרכנות:

14. על חטיף אנרגיה רשום הערך התזונתי המתאים לחטיף שמשקלו 100 גרם.

משקל החטיף הוא 30 גרם.

א. השלימו את טבלת הסימון התזונתי הבאה:

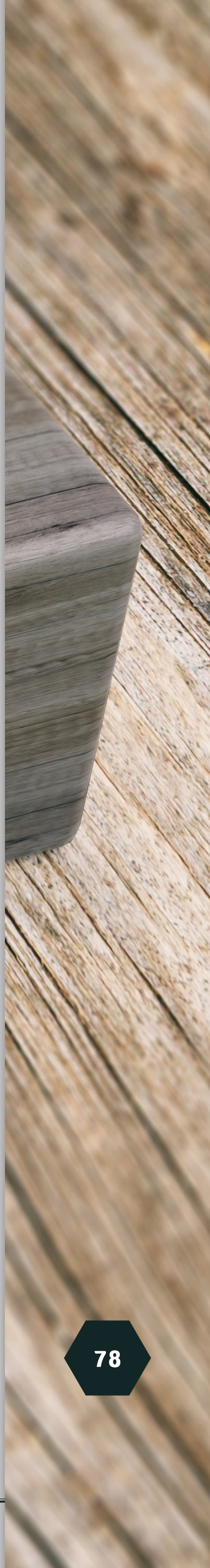
	ערך תזונתי בגרמים לחטיף שמשקלו 100 גרם	ערך תזונתי בגרמים לחטיף שמשקלו 30 גרם
חלבון	19	18
פחמימות	29	
שומן בלתי רווי		
שומן רווי		6
סיבים תזונתיים	11	2.1

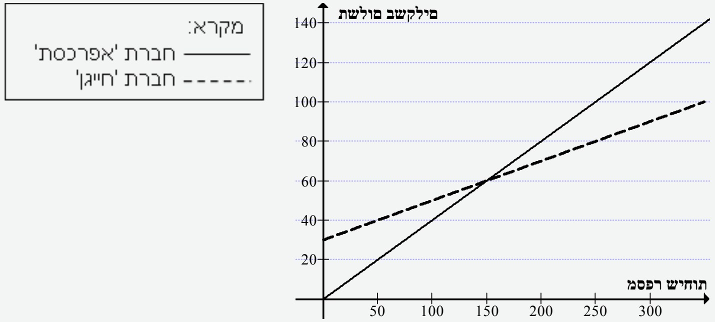
ב. שרטטו את נתוני המשקל של החטיף בדיאגרמה.

ג. מהו היחס בין משקל החלבונים לפחמימות בחטיף זה?

ד. היחס המומלץ בין שומן רווי לבלתי רווי הוא 1:5. האם החטיף עומד בדרישה? אם לא - איזה רכיב על היצרן להוסיף / להפחית על מנת שהחטיף יעמוד בדרישה?

ה. מה האחוז שמהווים הסיבים התזונתיים מכלל הרכיבים?



תחום מספרי: 2. אחוזים, סטטיסטיקה והסתברות (כולל שימושים אלגבריים) (30 שעות)	
אחוזים	15. שתי חברות סלולאריות - חברת 'אפרכסת' וחברת 'חייגן' - מציעות הרכב חשבון חודשי באופן שונה, כפי שמתואר בגרף הבא:  א. באיזה חברה יש תשלום התחלתי קבוע, גם אם לא התבצעה כל שיחה, ומהו? ב. כמה משלמים עבור דקת שיחה בכל חברה? ג. מהו הביטוי האלגברי המייצג את התשלום החודשי כפונקציה של מספר דקות שיחה בכל אחת מהחברות? ד. מהו מספר דקות השיחה שעבורן משלמים תשלום שווה בשתי החברות? ה. יגאל הוא לקוח של חברת 'אפרכסת'. הוא נוהג לדבר 200 דקות בחודש. הוא נוהג גם לשלוח הודעות טקסט באמצעות מכשיר הסלולאר שלו. על כל 4 שיחות שהוא מבצע הוא שולח הודעת טקסט אחת. עבור כל הודעה הוא משלם 30 אג' בחברה הנוכחית. מה יהיה החשבון החודשי הסופי של יגאל על פי נתונים אלו? ו. יגאל מחוייב לחברה לתקופה של 18 חודשים, ומתוכם עברו עד כה רק 8 חודשים. חוק חדש קובע שבמעבר מחברת סלולאר אחת לאחרת קנס היציאה שהצרכן יהיה צריך לשלם הוא 8% מערך החשבון החודשי, כפול מספר החודשים שנותרו לו עד סיום תקופת ההתחייבות. אם יגאל יבחר לעבור לחברה אחרת, מה גובה קנס היציאה שייאלץ לשלם לחברת 'אפרכסת'?
סטטיסטיקה	הנושא בעל הקשרים רבים במציאות, ונלמד בחלקו כבר בבית הספר היסודי. כאן מוצג סבב למידה נוסף הכולל חזרה, העמקה וקישור לתחום האלגברי.
איסוף נתונים וארגונם בדרכי ייצוג שונות: רשימה, טבלה, דיאגרמת עמודות, דיאגרמת עוגה, פיקטוגרמה ונקודות על מערכת צירים.	**דגשים:** 1. ארגון הנתונים מבוסס על מיון תוך קיום שלושה עקרונות: א. קביעת קריטריון משמעותי למיון; ב. הקבוצות הממוינות זרות זו לזו; ג. הקבוצות הממוינות ממצות את כל מגוון האפשרויות שבנתונים הגולמיים.

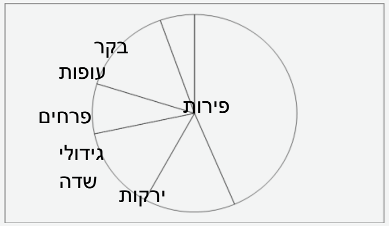
תחום מספרי: 2. אחוזים, סטטיסטיקה והסתברות (כולל שימושים אלגבריים) (30 שעות)	
איסוף נתונים וארגונם בדרכי ייצוג שונות: רשימה, טבלה, דיאגרמת עמודות, דיאגרמת עוגה, פיקטוגרמה ונקודות על מערכת צירים.	2. יש ללמוד את הנושא בהקשר של נתונים שמיים (לא מספריים), ובהקשר של נתונים כמותיים בדידים. 3. נדרשת קריאה והבנה של נתונים המוצגים בדרכים שונות. 4. נדרשת יצירה עצמאית של הייצוגים השונים (עבור אוסף נתונים סטטיסטיים) כחלק מההמרה של דרך ייצוג אחת באחרת. **דוגמאות:** 1. לקראת חידושו של המזנון בבית הספר, נערך בקרב תלמידי בית הספר סקר עמדות. התלמידים התבקשו לציין מהם דברי המאכל שלדעתם צריכים להיכלל בהיצע של המזנון. הציעו דרך למיין את המאכלים שעשויים להיכלל ברשימה המתקבלת לשש קבוצות זרות וממצות, וציינו לפחות 5 פריטים שיכולים להיות בכל אחת מן הקבוצות. 2. לפניכם גובהם בס"מ של תלמידי כיתה ג בבית הספר כלנית: 121, 130, 134, 120, 134, 126, 121, 130, 134, 134, 128, 128, 125, 120, 134, 130, 121, 122, 130. א. סדרו את הנתונים בטבלה. ב. כמה תלמידים בכיתה?
שכיחות ושכיחות יחסית	**שכיחות היא מספר הפעמים שפריט מופיע בקבוצה.** **שכיחות יחסית היא היחס שבין השכיחות לבין המספר הכולל של הפריטים הנדונים.** **שכיח הוא ערך הנתון, שעבורו מתקבלת השכיחות המרבית.** **דגשים:** 1. יש לטפל בשכיחות ובשכיחות יחסית של נתונים שמיים, ושל נתונים כמותיים בדידים. 2. יש להציג את השכיחות ואת השכיחות היחסית בכל דרכי הייצוג השונות של הנתונים. 3. יש להבין מהו המידע הגלום בשכיחות ומהו המידע הגלום בשכיחות יחסית. יש לדון ביתרונות השונים של מגוון הייצוגים של כל אחד מהם. 4. יש להשתמש באחוזים, בשברים פשוטים ובמספרים עשרוניים לתיאור של שכיחות יחסית. 5. שכיחות יחסית היא מושג בסיסי בלימוד הסתברות. **דוגמאות:** 1. לפניכם גובהם בס"מ של תלמידי כיתה ג בבית הספר כלנית: 121, 130, 134, 120, 134, 126, 121, 130, 134, 134, 128, 128, 125, 120, 134, 130, 121, 122, 130. א. מהו השכיח? ב. מהי השכיחות הגבוהה ביותר?

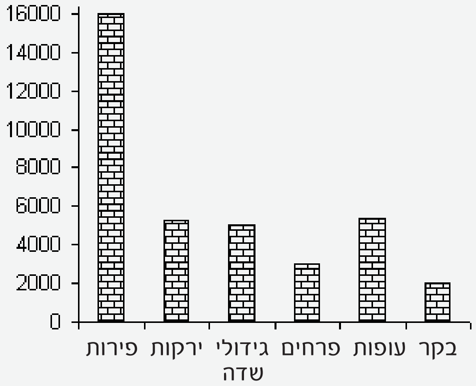
תחום מספרי: 2. אחוזים, סטטיסטיקה והסתברות (כולל שימושים אלגבריים) (30 שעות)

שכיחות ושכיחות יחסית

2. לפניכם טבלה המפרטת את מספרי המשקים העוסקים בענפים החקלאיים העיקריים בארץ בשנה מסוימת, וכן דיאגרמת עוגה ואחריה דיאגרמת עמודים עבור הנתונים שבטבלה.

ענף חקלאי	מספר המשקים	אחוז
פירות	16000	
ירקות	5300	
גידולי שדה	5000	
פרחים	3000	
עופות	5400	
בקר	2000	
ס"ה	36700	100%





א. השלימו את האחוזים, בטבלה, בראשי העמודות שבדיאגרמת העמודות, ובתוך דיאגרמת העיגול.

ב. מהי שכיחות משקי העופות? מהי השכיחות היחסית של משקי הבקר?
מהו הענף השכיח?

ג. מה גודל כל אחת מהזוויות בכל גזרת עיגול בדיאגרמת העוגה?

תחום מספרי: 2. אחוזים, סטטיסטיקה והסתברות (כולל שימושים אלגבריים) (30 שעות)	
טווח נתונים	**טווח הנתונים הוא המִּנְעד (התחום) של הנתונים, מהקטן ביותר ועד הגדול ביותר** **דגשים:** 1. יש לטפל בנתונים כמותיים בדידים. 2. יש להציג את טווח הנתונים כאומדן גס לפיזור הנתונים. יש להציג את יתרון המדד (פשטות) לעומת חסרונו (תלות בערך שולי). 3. הגדלת / הקטנת כל הנתונים בקבוע איננה משפיעה על ההפרש שבין קצוות טווח הנתונים. 4. כפל כל הנתונים בקבוע מגדיל את טווח הנתונים פי אותו קבוע. **דוגמה:** לפניכם רשימת ציונים של תלמידי הכיתה: 80, 82, 63, 56, 76, 82, 90, 56, 44, 72, 70, 80, 68, 76, 78, 80, 78, 82, 90, 85, 44, 72, 80, 82, 63, 70, 70, 80, 82, 82, 90, 90. א. ארגנו את הציונים בטבלת שכיחות, ורשמו את טווח הנתונים. ב. המורה שקלה האם להעלות לכל תלמידי הכיתה את הציון ב-5 נקודות, או להוסיף לכל תלמיד 10% מהציון. מה יהיה טווח הציונים בכל אחד מהמקרים?
מדדי מרכז: שכיח, חציון, ממוצע	**שכיח הוא ערכו של הנתון, שעבורו מתקבלת השכיחות המרבית.** **חציון הוא ערכו של הנתון האמצעי, כאשר הנתונים מסודרים בסדר עולה. כאשר מספר הנתונים הוא זוגי ויש שני נתונים אמצעיים, החציון יכול להיות כל ערך בין ערכי הנתונים האמצעיים, אך מקובל לבחור את הממוצע בין שני הערכים כחציון. אם שני הערכים הללו שווים זה לזה, אז שניהם החציון.** **ממוצע הוא הערך המתקבל מחלוקת סכום הערכים של כל הנתונים באופן שווה בין כל הפרטים שמהם ניגבו הנתונים.** **דגשים:** 1. חציון וממוצע מוגדרים עבור נתונים כמותיים בדידים. שכיח מוגדר, בנוסף, גם עבור נתונים שמיים. 2. כל שלושת מדדי המרכז הם ערכי ביניים: הם אינם יכולים להיות גדולים מהנתון המרבי, ואינם יכולים להיות קטנים מהנתון המזערי. 3. יש לדון ביתרונות ובחסרונות של כל אחד מהמדדים, כמייצגים את קבוצת הנתונים. 4. שכיח הוא תמיד אחד מהערכים בקבוצת הנתונים. חציון הוא אחד מהערכים בקבוצת הנתונים כאשר מספר הנתונים הוא אי-זוגי. ממוצע איננו בהכרח אחד מהערכים בקבוצת הנתונים. 5. הגדלת / הקטנת כל הנתונים בקבוע מגדילה / מקטינה את כל שלושת מדדי המרכז באותו קבוע. 6. כפל כל הנתונים בקבוע משנה את כל שלושת מדדי המרכז פי אותו קבוע. 7. סכום הסטיות מהממוצע שווה לאפס.

תחום מספרי: 2. אחוזים, סטטיסטיקה והסתברות (כולל שימושים אלגבריים) (30 שעות)

מדדי מרכז: שכיח, חציון, ממוצע

8. יש לפתור שאלות מילוליות העוסקות בממוצע באמצעים חשבוניים ואלגבריים ובמגוון הקשרים.
9. יש לדון בהשתנות החציון כתוצאה משינוי נתונים בצד אחד של החציון או בשני צדדיו.
10. יש להראות שהממוצע הוא המדד הרגיש ביותר לשינויים בנתונים שבשולי ההתפלגות.
11. הממוצע מושפע מכל הוספה של נתון יחיד, השונה מהממוצע עצמו.
12. בהתפלגות סימטרית, החציון והממוצע מתלכדים.
13. יש לטפל באומדן של חציון ושל ממוצע.
14. יש לעסוק בחישוב ממוצע מתוך טבלת שכיחות.

דוגמאות:

1. ממוצע הקליעות למשחק של שחקן כדורסל מסוים במהלך 11 משחקים הוא 30 נקודות. במשחק ה- 12 הוא קלע 6 נקודות בלבד.
   א. האם לדעתכם הממוצע יעלה, ירד או יישאר אותו הדבר? הסבירו.
   ב. מהו ממוצע הקליעות של השחקן בכל 12 המשחקים?
2. בבית מלאכה מועסקים 9 פועלים ומנהל. שכרם של 4 פועלים הוא 5,000 ₪ ושכרם של 5 פועלים נוספים הוא 5,200 ₪. שכרו של המנהל הוא 9,000 ₪.
   א. מצאו את השכר השכיח, את החציון ואת ההכנסה הממוצעת בבית המלאכה.
   ב. המנהל קיבל תוספת של אלפיים ₪ לשכרו. מהו השכר השכיח, מהו החציון ומהי ההכנסה הממוצעת בבית המלאכה, לאחר העלאת משכורתו של המנהל?
3. באחד מאגפי מפעל ייצור עובדים שישה אנשים ששכרם הרגיל הוא: 4,800 ₪, 4,900 ₪, 5,000 ₪, 5,050 ₪, 5,050 ₪, ו- 5,200 ₪.
   לקראת החגים, וכגמול על תפוקה מרובה, קיבלו כולם תוספת חד-פעמית של 50% משכרם הרגיל.
   א. מהו השכר הממוצע של ששת העובדים באופן רגיל, ומה היה שכרם הממוצע בעקבות התוספת החד-פעמית?
   ב. מהו חציון השכר של ששת העובדים באופן רגיל, ומה היה חציון שכרם בעקבות התוספת החד-פעמית?
   ג. מהו השכר השכיח של ששת העובדים באופן רגיל, ומה היה השכר השכיח בעקבות התוספת החד-פעמית?
   ד. בכמה אחוזים גדל הממוצע?

*4. מדריך בחוג מחשבים בדק כמה שעות גלשו תלמידי החוג באינטרנט ביום מסוים.
את התוצאות הוא רשם בטבלה שלפניכם:

מספר שעות גלישה	3	2	**1**	**0**
מספר תלמידים	5	5	**35**	**15**

א. מה היה זמן הגלישה **הממוצע** לתלמיד באותו היום (בשעות)?
ב. מהו הזמן השכיח ומהו החציון?

* לקוח ממיצ"ב תשע"א.

תחום מספרי: 2. אחוזים, סטטיסטיקה והסתברות (כולל שימושים אלגבריים) (30 שעות)	
מדדי מרכז: שכיח, חציון, ממוצע	5. נתונה קבוצת המספרים: 3, 6, 10, 11. הוסיפו לקבוצה מספר, כך שהממוצע של כל חמשת המספרים יהיה שווה לחציון. מצאו 3 פתרונות אפשריים. הסבירו מדוע שלושת הפתרונות שמצאתם הם כל הפתרונות האפשריים. 6. קבוצה של חמישה אנשים נתבקשה לרשום את משקל כל אחד מחבריה. במקום לרשום את משקל כל אחד מחברי הקבוצה, הציגה קבוצת האנשים את המידע הבא על משקלם: ההפרש בין קצוות טווח הנתונים = 30 ק"ג השכיח = 74 ק"ג החציון = 80 ק"ג הממוצע = 85 ק"ג א. כמה שוקל כל אחד מחמשת חברי הקבוצה? הסבירו. ב. אם כל אחד מחברי הקבוצה יוסיף למשקלו בדיוק 10 ק"ג, כיצד ישתנה כל אחד מן המדדים הנתונים (טווח, שכיח, חציון וממוצע)? הסבירו. 7. קבוצה אחרת, של חמישה אנשים, נתבקשה גם היא להציג את משקלו של כל אחד מחבריה. קבוצה זו בחרה להציג את הנתונים בדרך שונה. במקום להציג את משקלו כל אחד מחבריה, הם רשמו בכמה סוטה משקלו של כל אחד מהם מהמשקל הממוצע של הקבוצה (כלומר: רשמו את ההפרש בין משקלו של כל אחד לבין המשקל הממוצע). להלן הנתונים: 7, 3, 1, -4, -5 דני טוען כי יש טעות בנתונים אלה. כיצד ידע דני שיש טעות בנתונים מבלי להכיר את משקלם של כל אחד מחברי הקבוצה? 8. a, b ו-c מייצגים שלושה נתונים שנאספו. א. בטאו באמצעות a, b ו-c את הממוצע שלהם. ב. רשמו ביטוי אלגברי המתאר את הסטייה של a מהממוצע. ג. הראו שסכום שלוש הסטיות הוא אפס. ד. האם תקבלו תוצאה דומה גם עבור ארבעה או חמישה נתונים? 9. להלן רשימת הציונים של 10 תלמידים: 6, 6, 7, 7,7, 7, 8, 9, 9, 9. כל התלמידים שקיבלו ציון 9 ערערו, וציונם הועלה ל- 10. א. מצאו מה היה הציון השכיח מלכתחילה, ומה היה הציון השכיח לאחר קבלת הערעור על הציון. ב. מצאו מה היה הציון הממוצע מלכתחילה, ומה היה הציון הממוצע לאחר קבלת הערעור על הציון. ג. מצאו מה היה חציון הציונים מלכתחילה, ומה היה חציון הציונים לאחר קבלת הערעור על הציון.

תחום מספרי: 2. אחוזים, סטטיסטיקה והסתברות (כולל שימושים אלגבריים) (30 שעות)

מדדי מרכז: שכיח, חציון, ממוצע

10. 8 תלמידים קיבלו את תוצאות המבחן שלהם בחקר נתונים, וממוצע ציוניהם היה 7.6. תלמיד תשיעי קיבל את הציון באיחור, ואז התברר שממוצע הציונים של כל 9 התלמידים שווה לממוצע הציונים של 8 התלמידים הראשונים. מהו ציונו של התלמיד התשיעי? נמקו את תשובתכם.
11. מספר תלמידים נבחנו, וממוצע ציוניהם היה 7.6. שני תלמידים נוספים נבחנו בהמשך וקיבלו את הציונים 10 ו- 8. ממוצע הציונים של כל התלמידים (כולל שני התלמידים הנוספים) היה 7.8. כמה תלמידים נבחנו בסך הכל?
12. פרחי נוי גדלו בשלושה שדות שונים בתנאי השקיה שונים. לאחר הקטיף, מדדו את גובה הפרחים ורשמו אותו (מעוגלים ברמת דיוק של 5 ס"מ) בשלוש שורות בטבלת השכיחויות.

רשמו עבור כל שדה מי מבין השכיח, החציון והממוצע הוא הגדול ביותר ומיהו הקטן ביותר.

גובה הפרח	50 ס"מ	55 ס"מ	60 ס"מ	65 ס"מ	70 ס"מ	75 ס"מ	80 ס"מ
שכיחות הפרחים בשדה א'	320	560	480	400	360	320	280
שכיחות הפרחים בשדה ב'	280	320	400	550	400	320	280
שכיחות הפרחים בשדה ג'	280	320	360	400	480	560	320

13. בשוליו של כפר דייגים ניצב בית מידות של אדם עשיר. ברוב ימות השבוע הוא נמצא בעיר ומנהל את עסקיו הנרחבים, אך בכל יום א' הוא מפליג לדוג דגים בסיוע שני בחורים מהכפר. השכר שהוא משלם להם ביום אחד זה עולה על כל הכנסתם בשאר ימי השבוע. במרשם התושבים רשום העשיר כתושב כפר הדייגים. כששואלים אותו למקצועו ולתחביביו, הוא אומר: "תחביבי הוא לצבור כסף המקצוע האמיתי שלי הוא דיג".
    א. מה משקף, לדעתכם, בצורה טובה יותר את מצבו הכלכלי של ציבור הדייגים בכפר, ממוצע ההכנסות של תושבי הכפר או החציון? נמקו.
    ב. מה משקף, לדעתכם, בצורה טובה יותר את מצבם הכלכלי של שני הבחורים הנ"ל, ממוצע הכנסתם היומית או החציון? נמקו.

הסתברות

הסתברות היא תורה מתמטית בעלת השלכות שימושיות לחיי היומיום. היא עוסקת בהתרחשויות עתידיות הכרוכות באי-ודאות. הפרק 'הסתברות' בכיתה ח כולל היכרות ראשונית עם תחום תוכן זה, במטרה להקנות לתלמידים ידע בסיסי. העמקה בתחום זה תיעשה בכיתה ט ובחטיבה העליונה.

תחום מספרי: 2. אחוזים, סטטיסטיקה והסתברות (כולל שימושים אלגבריים) (30 שעות)	
הסתברות לקבלת תוצאה היא קביעה מראש של מידת ההיתכנות שהתוצאה תתרחש, בסולם שבין 0 ל-1.	**דגשים:** 1. העיסוק בהסתברות בחטיבת הביניים צריך להיות מושתת על תובנה בסיסית. השלב הראשון בלימוד צריך להתמקד בקשר שבין ערך ההסתברות ובין מידת ההיתכנות שאנחנו מייחסים לתוצאה לא ודאית. 2. לתוצאה ודאית - הסתברות 1. 3. לתוצאה שברור שלא תתממש - הסתברות 0. 4. ההסתברות של תוצאה שההערכה להתממשותה שווה להערכה שלא תתממש היא ½. 5. ההסתברות של תוצאה שההערכה להתממשותה גדולה מהערכה לאי-התממשותה גדולה מ- ½. 6. יש לדעת לאמוד את ההסתברות לתוצאה על סמך הערכה ראשונית לשאלה עד כמה קבלת התוצאה קרובה לוודאות, עד כמה קבלת התוצאה קרובה להיות בלתי אפשרית, ועד כמה הסיכוי לקבלת התוצאה קרוב לסיכוי לאי קבלתה. **דוגמאות:** 1. מהי ההסתברות לקבלת 'עץ' בהטלת מטבע? 2. מהי ההסתברות שבזריקת מטבע יצא 'עץ' או 'פלי' (בהנחה שהמטבע לא נופל 'בעמידה')? 3. בסופרמרקט, באחת מכל 4 תבניות ביצים קיימת לפחות ביצה שבורה אחת. האם ההסתברות שאין בתבנית ביצים אף ביצה שבורה גדולה מחצי?
תכונות של ההסתברות במצבים סימטריים	**דגשים:** 1. הסכום של ההסתברות שתוצאה תתקבל וההסתברות שהיא לא תתקבל הוא 1. 2. אם תוצאה מתפצלת לתוצאות משנה, הסתברותה היא סכום ההסתברויות של כל תוצאות המשנה. 3. במצב שבו הסימטרייה בקבלת שתי תוצאות שונות ניכרת לעין, ההסתברויות לקבלת שתי התוצאות שוות זו לזו. 4. במצב שבו הסימטרייה בקבלת n תוצאות זרות וממצות ניכרת לעין, ההסתברות לקבלת כל אחת מהתוצאות היא 1/n. 5. אם תוצאה מורכבת מ-k תוצאות, שההסתברות לקבלת כל אחת מהן היא 1/n, אז ההסתברות שהיא תתקבל היא k/n. **דוגמאות:** 1. מטילים קובייה. א. מהי ההסתברות לקבל את התוצאה 4? ב. מהי ההסתברות לקבל תוצאה זוגית? ג. מהי ההסתברות לקבל תוצאה גדולה מ- 4?

תחום מספרי: 2. אחוזים, סטטיסטיקה והסתברות (כולל שימושים אלגבריים) (30 שעות)

תכונות של ההסתברות במצבים סימטריים

2. מוציאים כדור מתוך שק שבו 5 כדורים צהובים, 4 כדורים אדומים ו- 3 כדורים כחולים.
   א. מהי ההסתברות שהוצא כדור אדום?
   ב. מהי ההסתברות שהוצא כדור שאינו אדום?
3. מטילים שתי קוביות משחק רגילות - אחת כחולה ואחת אדומה.
   א. כמה תוצאות אפשריות יש?
   ב. האם התוצאה שבה הקובייה האדומה יצאה 5 והקובייה הכחולה יצאה 2 זהה לתוצאה שבה הקובייה האדומה יצאה 2 והקובייה הכחולה יצאה 5?
   ג. מהי ההסתברות שסכום תוצאות הקוביות הוא 5?
   ד. מהו הסכום שההסתברות לקבלו היא המרבית?
4. בוחרים באקראי מספר טבעי בין 1 ל-100 (כולל הקצוות). מהי ההסתברות שהוא יהיה זוגי? נמקו את תשובתכם.

אומדן להסתברות לקבלת תוצאה יכול להתקבל באמצעות בדיקת השכיחות היחסית של אותה תוצאה כשחוזרים על אותו ניסוי מספר רב של פעמים.

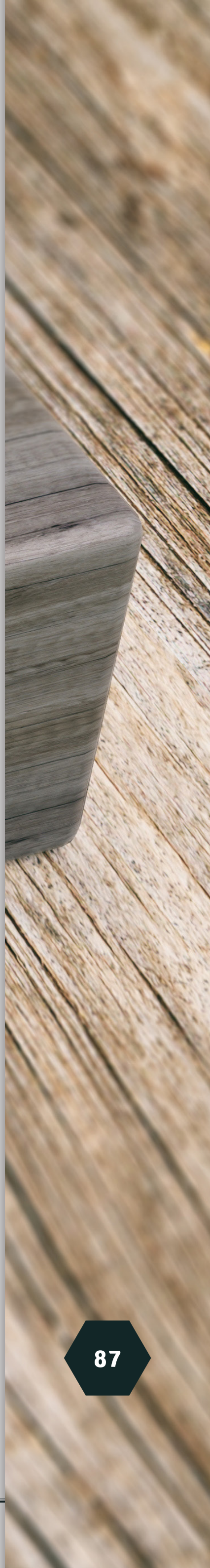
דגשים:

1. קיים קשר בין שכיחות יחסית ובין הסתברות. הנטייה של תוצאה להתקבל בשכיחות יחסית מסוימת היא פירוש נוסף להסתברות.
2. בפרק זה יש לבצע פעילויות חוזרות ולעבד את התוצאות כדי לאמוד הסתברות.
3. כשפעילות יכולה להניב כמה תוצאות, השכיחות היחסית של כל תוצאה היא אומדן להסתברות לקבלת אותה תוצאה.
4. יש ללמוד להסיק הסתברות מתוך מגוון ייצוגים של שכיחות או של שכיחות יחסית.

דוגמאות:

1. הטילו קוביית משחק 6 פעמים. הציגו טבלה המציגה, כנגד כל תוצאה אפשרית, את השכיחות שלה ואת השכיחות היחסית שלה.
2. הטילו קוביית משחק 300 פעמים (ניתן לעשות זאת בכיתה כשכל תלמיד מטיל קובייה 20 פעם ומסכמים את התוצאות). הציגו טבלה המציגה, כנגד כל תוצאה אפשרית, את השכיחות שלה ואת השכיחות היחסית שלה. האם תוצאה זו תואמת את ציפיותיכם?
3. הטילו שתי קוביית משחק 300 פעמים, ובכל הטלה חשבו את סכום הקוביות. הציגו טבלה המציגה כנגד כל סכום אפשרי את השכיחות שלו ואת השכיחות היחסית שלו. הציגו באמצעות טבלה אומדן להסתברות של הסכום. מהי התוצאה שלה ההסתברות הגבוהה ביותר? מהי התוצאה שלה ההסתברות הנמוכה ביותר?
4. בטבלת השכיחויות הבאה מוצגות תוצאות במבחן הישגים ארצי במתמטיקה.
   בבחירה אקראית של תלמיד, מה הסיכוי שציונו במבחן הוא 80 ומעלה?

ציון	90 - 100	80 - 89	70 - 79	60 - 69	50 - 59	מתחת ל- 50
מספר	8,000	15,000	35,000	25,000	10,000	7,000



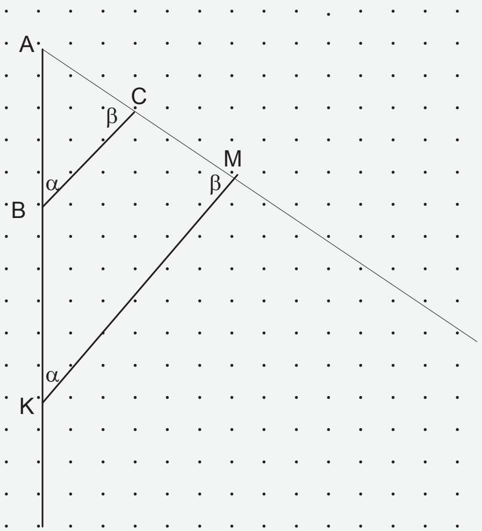
תחום גאומטרי: 2. דמיון משולשים, דמיון מצולעים (12 שעות)

נושאי הלימוד	דגשים ודוגמאות
משולשים דומים מצולעים דומים	לימוד הדמיון משתלב עם לימוד יחס, פרופורציה וקנה מידה. דמיון משולשים הוא עבור התלמידים מקרה ראשון ליחס שקילות שאינו זהות. **משולשים דומים הם משולשים שבהם לכל זווית במשולש אחד יש זווית ששווה לה במשולש האחר, וקיים יחס שווה בין שלושת זוגות הצלעות המתאימות (צלעות מתאימות נמצאות מול זוויות שוות).** **יחס זה נקרא יחס הדמיון.** **מצולעים דומים הם מצולעים שבהם לכל זווית במצולע אחד יש זווית מתאימה ששווה לה במצולע האחר, כך שהסדר בין הזוויות השוות נשמר, והיחס בין כל שתי צלעות במצולע אחד שווה ליחס שבין שתי הצלעות המתאימות במצולע האחר.** **דגשים:** 1. דמיון משולשים יוצג תחילה בדרך אינטואיטיבית: הגדלה או הקטנה של מצולע בעזרת זכוכית מגדלת או מקטנת, הגדלה או הקטנה בצילום או הגדלה והקטנה באמצעות תוכנת מחשב. 2. מומלץ לשיים משולשים דומים לפי סדר ההתאמה בין הקודקודים. 3. היחס בין שטחם של שני משולשים דומים הוא רבועו של יחס הדמיון ביניהם. התכונה תתקבל מתוך התבוננות במקרים פרטיים, וההכללה תיעשה ללא הוכחה פורמאלית. 4. אם לשני משולשים זוויות שוות, אז הם דומים, ומכאן שגם קיים יחס דמיון בין הצלעות. (ראה דוגמה 2) 5. יש ללמוד לזהות משולשים דומים. 6. יש ללמוד למצוא נתונים חסרים מתוך תכונת הדמיון ותוך שימוש בפרופורציה. 7. יש לעסוק בבעיות המשלבות בין דמיון משולשים ובין עובדות שנלמדו בכיתה ז ובתחילת כיתה ח'. 8. יש לשלב דוגמאות מחיי היומיום. 9. במצולעים בני ארבע צלעות או יותר, בשונה ממשולשים, שוויון זוויות איננו מבטיח דמיון. **דוגמאות:** 1. דוגמה לפעילות שתוביל להגדרה של משולשים דומים ולחלק מתכונותיהם: הפעילות כוללת בניית משולש מ- 4 עותקים של משולש נתון שונה צלעות, מ- 9 ומ- 16 עותקים של משולש נתון (פירוט הפעילות מופיע בנספח). כמסקנה מפעילות זו, נקבל בבניות שתיארנו את שוויון הזוויות, את שוויון יחסי הצלעות ואת יחסי השטחים שבין המשולש הנתון לבין המשולשים המתקבלים מאותו משולש.

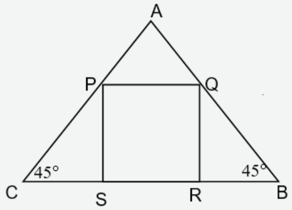
תחום גאומטרי: 2. דמיון משולשים, דמיון מצולעים (12 שעות)

משולשים דומים ומצולעים דומים

2. נתונות שתי קרניים היוצאות מהנקודה A, ונתון משולש ABC.
שתיים מזוויותיו של משולש ABC הועתקו למשולש AKM.
   א. האם המשולש AKM דומה למשולש ABC?
   ב. העתיקו את הזוויות a ו– b על המשך הקרניים היוצאות מ- A.
   בדקו אם המשולש שהתקבל דומה למשולש ABC.
   בדקו אם המשולש שהתקבל דומה למשולש AKM.
   השלימו את המסקנה: אם לשני משולשים זוויות שוות אז הם ___________



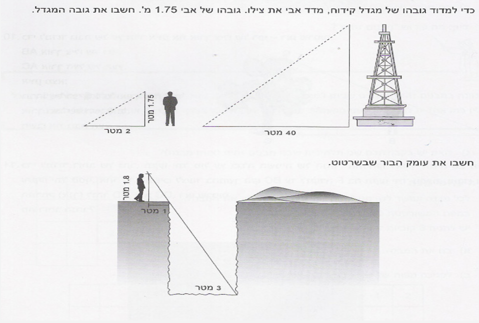
3. נתונים המשולשים ABC, ADE.
BC || DE. נמקו מדוע המשולשים דומים.



תחום גאומטרי: 2. דמיון משולשים, דמיון מצולעים (12 שעות)

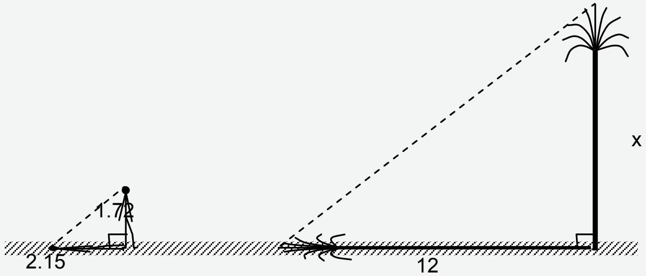
משולשים דומים ומצולעים דומים

4. חשבו את עומק הבור שבשרטוט, והסבירו כיצד מצאתם, ועל אילו תכונות התבססתם.

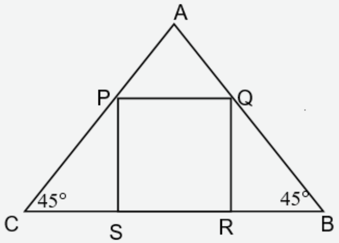

כדי למדוד גובהו של מגדל קידוח, מדד אבי את צילו. גובהו של אבי 1.75 מ'. חשבו את גובה המגדל.

חשבו את עומק הבור שבשרטוט.

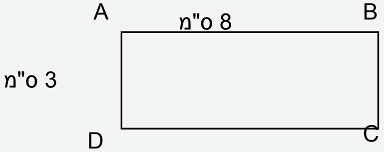
5. אדם שגבהו 1.72 מטר עמד בשמש ליד דקל. אורך צילו של האדם היה 2.15 מטר ואורך צילו של הדקל באותו זמן היה 12 מטר. מה גובה הדקל? (קרני השמש יוצרות אותה הזווית עם הדקל ועם האדם.)

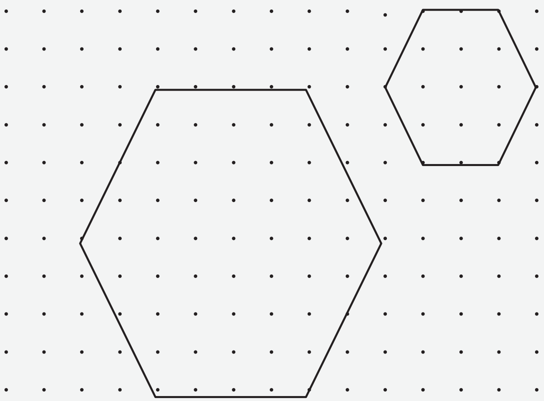


6. במשולש ABC חסום ריבוע PQRS.
   א. חשבו את כל הזוויות שבשרטוט על סמך הנתונים.
   ב. ציינו את כל המשולשים ישרי הזווית שבשרטוט.
   ג. אילו מבין המשולשים האלה דומים ל-ΔACB?
   ד. מדדו (בעזרת סרגל) וחשבו את היחס שבין הצלעות של שניים מהמשולשים הדומים.
   ה. האם בין המשולשים האלה יש משולשים החופפים זה לזה? נמקו.



7. נתון מלבן ABCD, שמידותיו רשומות על גבי השרטוט. שרטטו מלבן דומה KLMN שאורך אחת מצלעותיו היא 12 ס"מ. רשמו את אורכי הצלעות של המלבן KLMN.
כמה מלבנים דומים כאלה יש? הסבירו.

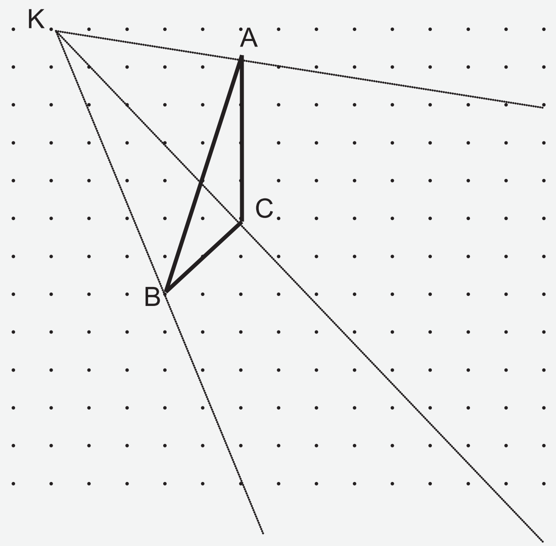


תחום גאומטרי: 2. דמיון משולשים, דמיון מצולעים (12 שעות)	
משולשים דומים ומצולעים דומים	8. לגבי כל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה; נמקו. א. כל שני מלבנים דומים זה לזה. ב. כל שני ריבועים דומים זה לזה. ג. כל שני משושים דומים זה לזה. ד. כל שני מתומנים משוכללים דומים זה לזה. 9. קבעו האם המשושים שלפניכם דומים זה לזה. נמקו את תשובתכם. אם המשושים דומים, מהו יחס הדמיון? 

תחום גאומטרי: 2. דמיון משולשים, דמיון מצולעים (12 שעות)

משולשים דומים ומצולעים דומים

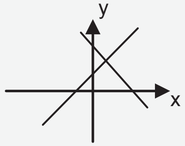
10. מהנקודה K שבשרטוט יוצאות 3 קרניים. היעזרו בקרניים ושרטטו משולש EDF הדומה למשולש ABC ושיחס הדמיון הוא 2.

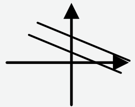
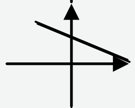
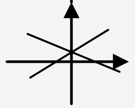


11. א. שרטטו משולש א שאורכי צלעותיו הם 3, 4, 5 ס"מ.
ב. שַרטטו משולש ב שדומה לו, ושיחס הדמיון בין המשולשים הוא 3.
ג. אם נגדיל כל אחת מהצלעות של משולש א ב- 3 ס"מ, האם המשולש שיתקבל יהיה דומה למשולש א? נמקו.

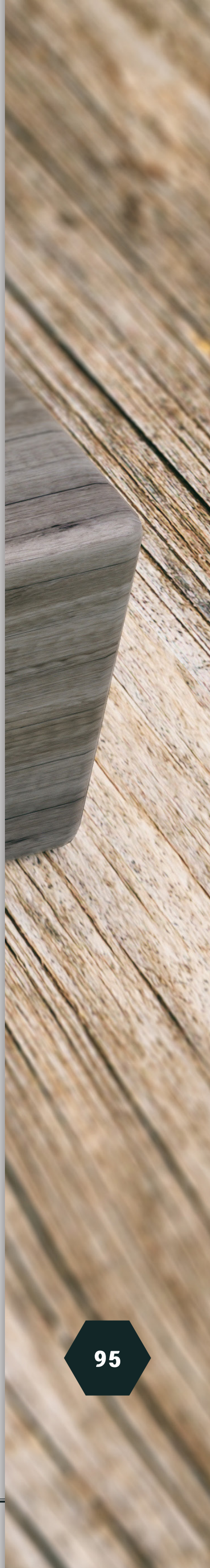
סבב 3

תחום אלגברי	תחום מספרי	תחום גאומטרי
מערכת משוואות של שתי משוואות מהמעלה הראשונה - שאלשות מילוליות מתאימות; **ערך מוחלט ואי-שוויונות - העמקה** (18 שעות)	**שורש ריבועי ומספר אי-רציונאלי** (4 שעות)	**משפט פיתגורס במישור ובמרחב גליל** **(12 שעות)**

תחום אלגברי: 1. מערכת משוואות של שתי משוואות מהמעלה הראשונה - שאלות מילוליות מתאימות, ערך מוחלט ואי-שוויונות - העמקה (18 שעות)	
נושאי הלימוד	**דגשים ודוגמאות**
מערכת משוואות של שתי משוואות מהמעלה הראשונה ושאלות מילוליות מתאימות	בפרק זה לומדים לפתור מערכות של שתי משוואות קוויות בשני משתנים. **דגשים:** 1. יש לפתוח בנושא באמצעות שאלות מילוליות המחייבות פתרון מערכת של שתי משוואות קוויות בשני נעלמים. 2. יש ללמוד לפתור מערכות משוואות באמצעים גרפיים. 3. יש ללמוד לפתור מערכות משוואות באמצעים אלגבריים (בשיטת ההצבה ועל ידי הבאה למקדמים שווים). יש ללמוד לשקול איזו שיטה נוחה יותר עבור מערכת משוואות נתונה. 4. יש לזהות את מספר הפתרונות שיכול להיות אפס, אחד או אינסוף. 5. יש לפתור שאלות מילוליות שאותן ניתן לפתור באמצעות פתירת מערכת של שתי משוואות קוויות בשני נעלמים. דוגמאות: 1. מצאו שני מספרים שסכומם 127 והפרשם 47. 2. פתרו את מערכות המשוואות הבאות: ג. $\begin{cases} 2x+y=2 \\ 3x-y-x=-4 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} \frac{x-4y}{2}=\frac{x-2y}{5} \\ \frac{1}{2}x+2y=x-1 \end{cases}$ א. $\begin{cases} (x-1)(y+2)=xy+3 \\ (x+5)(y-1)=(x-3)(y+2) \end{cases}$ 3. לפניכם 3 מערכות משוואות בשני נעלמים וגרף אחד שמתאים רק לאחת מהמערכות. מצאו את המערכת המתאימה. נמקו! ג. $\begin{cases} 2y-x=2 \\ y=x+3 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} y-x=2 \\ y+x=4 \end{cases}$ א. $\begin{cases} 2x+y=2 \\ x+3y=1 \end{cases}$ 

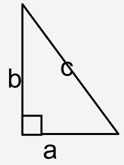
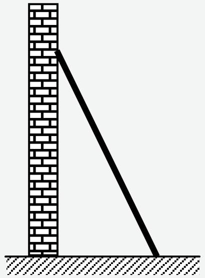
תחום אלגברי: 1. מערכת משוואות של שתי משוואות מהמעלה הראשונה - שאלות מילוליות מתאימות, ערך מוחלט ואי-שוויונות - העמקה (18 שעות)	
מערכת משוואות של שתי משוואות מהמעלה הראשונה ושאלות מילוליות מתאימות	4. התאימו בין הייצוגים הגרפיים ובין הייצוגים האלגבריים. א. $\begin{cases}6x+9y=12\\2x+3y=4\end{cases}$ ב. $\begin{cases}6x+9y=4\\2x+3y=12\end{cases}$ ג. $\begin{cases}9x+3y=12\\-3x+2y=8\end{cases}$    5. רות שילמה 29 שקלים עבור כביסה של 4 מגבות ו-7 סדינים. לקראת החג פורסם מבצע של 20% הנחה. במסגרת ההנחה שילמה רות 20 שקלים בלבד עבור כביסה של 5 מגבות ו-5 סדינים. מהו התעריף הרגיל של המכבסה עבור כביסת מגבת אחת ועבור סדין אחד? 6. דני ועמי יצאו ברגל זה לקראת זה, משני יישובים המרוחקים זה מזה 30 ק"מ. הם נפגשו כעבור 4 שעות. למחרת, יצא עמי 5 שעות אחרי דני, והם נפגשו שעתיים לאחר צאתו של עמי. מהי מהירות ההליכה של דני ושל עמי? 7. אם נגדיל צלע אחת של מלבן ב-2 ס"מ ונקטין צלע סמוכה לה ב-3 ס"מ, נקבל ריבוע שהיקפו 20 ס"מ. מהן מידות המלבן? מהו שטח המלבן? מהו שטח הריבוע שנוצר?
ערך מוחלט	**ערך מוחלט הוא הערך של מספר תוך התעלמות מהסימן שלו.** **ערך מוחלט של מספר מבטא את מרחקו של המספר מאפס. את הערך המוחלט של x מסמנים $\|x\|$.** **דגשים:** 1. בהקשר של **מספרים מכוונים** הערך המוחלט של מספר הוא גודלו של המספר המכוון. בפרט, ל-a ול- (-a) אותו ערך מוחלט. 2. ערך מוחלט של מספר הוא תמיד **חיובי**, למעט ערכו המוחלט של אפס, ששווה לאפס. 3. עבור כל שני מספרים x ו-y, הביטוי $\|x - y\|$ מבטא את המרחק בין x ובין y על ציר המספרים. עבור $x > y$, המרחק בין x ל-y הוא ההפרש: $x - y$. 4. יש ללמוד לזהות ולשרטט את הגרף של הפונקציה $y = \|x\|$ ו- $y = \|x - a\|$ **דוגמאות:** 1. מהו הערך המוחלט של המספרים הבאים: א. 6 ב. -8 ג. 0 ד. $-\frac{1}{2}$ 2. אם ערך מוחלט של מספר הוא 9, מה יכול להיות המספר? 3. מהם הערכים של x שעבורם $\|x - 3\| = 5$. נמקו את תשובתכם תוך פירוש הערך המוחלט במושגים של מרחק.

תחום אלגברי: 1. מערכת משוואות של שתי משוואות מהמעלה הראשונה - שאלות מילוליות מתאימות, ערך מוחלט ואי-שוויונות - העמקה (18 שעות)	
ערך מוחלט	4. כתבו טבלת ערכים חלקית של הפונקציה $y = \|x - 3\|$ הכוללת שלושה ערכים של x הקטנים מ-3 ושלושה ערכים של x הגדולים מ-3. שרטטו גרף של פונקציה זו. 5. הסבירו מדוע $\|x - 3\|=\|x - 3\|$. 6. מה הקשר בין ערך מוחלט של ריבוע של מספר לריבוע של הערך המוחלט שלו?
אי-שוויונות (העמקה)	פתרון אי-שוויונות באמצעים גרפיים. **דגש:** בפרק זה פותרים אי-שוויונות באמצעים גרפיים (ובאמצעים אלגבריים, כשהדבר ניתן). המטרה היא להעמיק את האינטואיציה, כהכנה לפתרון בעיות מסוג זה באמצעים אלגבריים בכיתות גבוהות יותר. **דוגמאות:** 1. פתרו את אי-השוויון: $\frac{1}{x} < \frac{1}{7}$ 2. פתרו את אי-השוויון $\|x - 3\| < 5$.



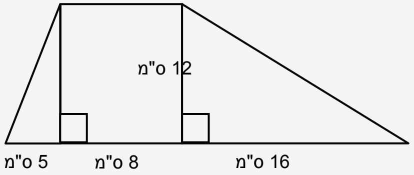
תחום מספרי: 3. שורש ריבועי ומספר אי-רציונאלי (4 שעות)	
נושאי הלימוד	**דגשים ודוגמאות**
שורש ריבועי ומספר אי-רציונאלי	מומלץ ללמד נושא זה לפני או תוך כדי הלימוד של משפט פיתגורס. **דגשים:** 1. הצורך לחשב שורש ריבועי מתעורר בכל עת בה מחשבים אורך של צלע בהסתמך על משפט פיתגורס. התלמידים למדו על השורש הריבועי בכיתה ז, אבל למדו לחשב אותו רק כשהתוצאה היא מספר שלם, וחישובים המסתמכים על משפט פיתגורס מחייבים הכרת שורשים שאינם מספרים שלמים. 2. $\sqrt{9}$ למשל, הוא ביטוי לפעולה וכן הוא הייצוג של המספר 3. 3. יש לאמוד שורש ריבועי לפחות ברמת דיוק של שלם. 4. יש להסביר לתלמידים את ההבדל בין מספרים רציונאליים ובין מספרים אי-רציונאליים. יש להסביר שמספרים רציונאליים יכולים להיכתב כמנה של שני מספרים שלמים, אבל הייצוג העשרוני שלהם אינו בהכרח סופי והוא יכול להיות אינסופי מחזורי (למשל: שליש). למספרים אי-רציונאליים יש רק ייצוגים אינסופיים לא מחזוריים. 5. בכיתות מתקדמות ניתן להוכיח שהשורש הריבועי של 2 אינו רציונאלי. מומלץ גם להציג את ההקשר ההיסטורי של גילוי קיומם של מספרים אי-רציונאליים. **דוגמאות:** 1. אמדו את השורש הריבועי של 2: האם הוא גדול או קטן מ-1? האם הוא גדול או קטן מ-2? האם הוא גדול או קטן מ-1.5? מצאו שני מספרים שהפרש הוא 0.5, שהאחד קטן מהשורש הריבועי של 2 והאחר גדול ממנו. 2. סמנו > או <: א. 3 ☐ $\sqrt{5}$ ב. 4.5 ☐ $\sqrt{18}$ 3. השלימו את המספרים השלמים הקרובים ביותר ל $\sqrt{2}$ במשבצות: $\square < \sqrt{22} < \square$ מקמו את המספרים הבאים על ציר המספרים: $\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{125}$, $\sqrt{600}$

תחום גאומטרי: 3. משפט פיתגורס במישור ובמרחב, גליל (12 שעות)

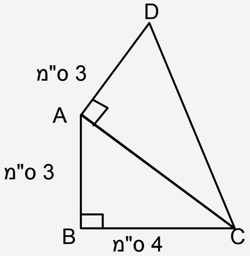
נושאי הלימוד	דגשים ודוגמאות
משפט פיתגורס במישור ובמרחב	משפט פיתגורס הוא אולי המשפט הראשון שאותו פוגשים התלמידים, ואשר נכונותו אינה נראית לעין, ומכאן נחיצותה של הוכחה. **משפט פיתגורס: במשולש ישר זווית סכום ריבועי הניצבים שווה לריבוע היתר.** $a^2 + b^2 = c^2$  **דגשים:** 1. יש לשלב פעילויות העוסקות בהוכחת המשפט בדרכים מגוונות. 2. יש ללמוד לחשב צלעות והיקפים בעזרת משפט פיתגורס. 3. השימוש במשפט פיתגורס מצריך חישוב שורש ריבועי, ולימוד זה משתלב עם העיסוק בשורשים בתחום המספרי. 4. מומלץ לעסוק בבניות שבהן יש להסיק נתונים חסרים בעזרת משפט פיתגורס. 5. יש להוסיף למשפטי החפיפה שנלמדו כבר, את משפט החפיפה: שני משולשים ישרי זווית שלהם ניצב שווה ויתר שווה – חופפים זה לזה. 6. יש לעסוק בבעיות המשלבות בין משפט פיתגורס לבין עובדות שנלמדו בכיתות ז-ח. 7. יש ליישם את משפט פיתגורס במרחב: בקוביות ובתיבות. חשוב להיעזר באמצעי המחשה. 8. יש להבחין בין אלכסון של פאה (אלכסון של מלבן) לבין אלכסון של תיבה שהוא קטע המחבר שני קודקודים שאינם על אותה פאה. דוגמאות: 1. א. השתמשו בעובדה ש: $5 = 2^2 + 1$ ושרטטו קטע באורך $\sqrt{5}$ ס"מ. מדדו באמצעות סרגל ומצאו אומדן למספר $\sqrt{5}$. ב. בנו ריבוע שאלכסונו $\sqrt{8}$ ס"מ. 2. נתון ריבוע ששטחו 1 סמ"ר. בנו ריבוע ששטחו כפול משטח הריבוע הנתון. 3. א. סולם נשען על הקיר. רגליו נמצאות במרחק 50 ס"מ מהקיר וראשו בגובה 1.5 מ'. מה אורך הסולם? ב. הסולם החליק, ומרחקו מהקיר הוא עתה 60 ס"מ. לאיזה גובה יגיע הסולם? 

תחום גאומטרי: 3. משפט פיתגורס במישור ובמרחב, גליל (12 שעות)

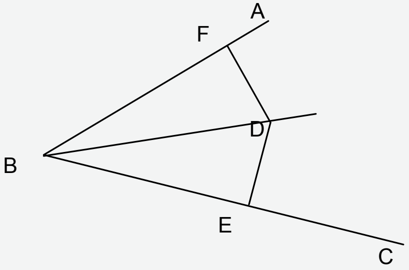
4. אורך האלכסון של מסך טלוויזיה מלבני הוא 25 אינץ’.
   א. האם ניתן לקבוע את האורך והרוחב של המסך?
   ב. מהם האורך והרוחב שלו, אם ידוע שהיחס ביניהם הוא 4 : 3?
   ג. מהו שטח המסך?
   ד. מהו היקף המסך?



5. נתון טרפז. חלק מהנתונים רשומים על גבי השרטוט.
   א. חשבו את שטח הטרפז
   ב. חשבו את היקף הטרפז.



6. א. חשבו את שטח המרובע ABCD על פי הנתונים בשרטוט.
   ב. חשבו את היקף המרובע ABCD.
7. א. נתונים שני משולשים ישרי זווית. לכל משולש ניצב אחד באורך 6 ס”מ ואורכו של היתר הוא 9 ס”מ. נמקו מדוע המשולשים חופפים.
   ב. נתונים שני משולשים ישרי זווית. לכל משולש ניצב אחד באורך a ס”מ ואורכו של היתר הוא c ס”מ. נמקו מדוע המשולשים חופפים.
   ג. מה תוכלו לומר על כל שני משולשים ישרי זווית שלהם ניצב ויתר שווים.



8. נתונה זווית ABC. מהנקודה D שבתוך הזווית מורידים אנכים לשוקי הזווית. שני האנכים שווים באורכם. נמקו מדוע AD הוא חוצה הזווית ABC.
9. האם אפשר להניח מטרייה שאורכה 75 ס”מ במזוודה שממדיה הם 60X40X25 ס”מ?
10. נפח של תיבה הוא 180 סמ”ק. היעזרו בהמחשה של תיבה.
   א. אילו אורכי צלעות יכולים להיות לתיבה? רשמו 3 אפשרויות.
   ב. בחרו את אחת התיבות שהצעתם וחשבו את האורכים של אלכסוני הפאות של התיבה.
   ג. האם אורך כל אלכסון של פאה של תיבה גדול מאורך כל אחת מצלעותיה? נמקו או הדגימו.
   ד. חשבו את אורך אלכסונה של התיבה.
   ה. האם אורך אלכסון התיבה גדול מאורך כל אחת מצלעותיה? נמקו.
   ו. שערו: מבין שלוש האפשרויות שרשמתם, לאיזו תיבה שנפחה 180 סמ”ק האלכסון הארוך ביותר? נמקו.
   ז. בדקו על ידי חישוב אם צדקתם.

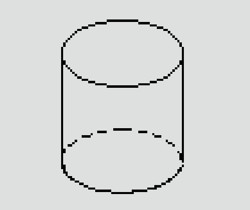
תחום גאומטרי: 3. משפט פיתגורס במישור ובמרחב, גליל (12 שעות)

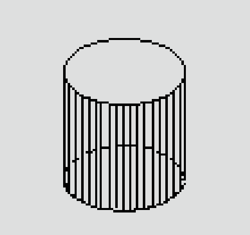
גליל (גליל ישר בלבד) היכרות עם הגוף, חישוב שטח פנים, חישוב שטח מעטפת, חישוב נפח, פריסה

גליל - גוף המורכב משני עיגולים חופפים הממוקמים במישורים מקבילים, ומכל הקטעים המחברים עיגולים אלה.

לשני העיגולים קוראים בסיסי הגליל.

לגליל הישר קיימת מעטפת שהיא בצורת מלבן.





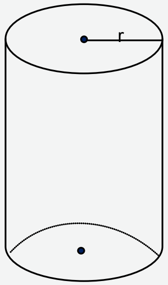
דגשים:

1. יש ללמוד לחשב את שטח הפנים, שטח המעטפת והנפח של גליל שממדיו נתונים, באמצעים מספריים ואלגבריים.
2. יש לדון בהשתנות שטח פני הגליל כתוצאה משינויים חיבוריים וכפליים באורכי הגובה והרדיוס, למשל: במקרים שבהם אורכי הגובה והרדיוס מוכפלים פי 2.
3. יש לדעת לשרטט פריסה של גליל.
4. יש לעסוק בבעיות המשלבות בין חישובים עם גליל לבין עובדות שנלמדו בכיתות ז-ח, כולל המרת מידות.
5. יש ליישם את משפט פיתגורס במרחב עם גליל. חשוב להיעזר באמצעי המחשה.
6. יש לעסוק בשאלות בהקשרים מציאותיים.

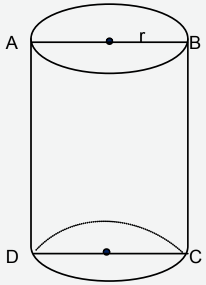
דוגמאות:

1. חשבו את נפח הגלילים ושטחי המעטפת שלהם על פי הנתונים:

א. 3 ס"מ = r
8 ס"מ = h

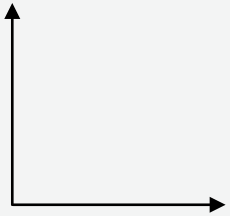


ב. שטח ABCD הוא 60 סמ"ר
5 ס"מ = r

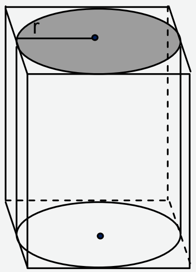


2. שרטטו פריסה של גליל.
3. נתון כלי בצורת גליל ששטח הבסיס שלו הוא 1000 סמ"ר וגובהו 20 ס"מ. ממלאים את הגליל ב- 4 ליטרים של מים. מה יהיה גובה פני המים לאחר המילוי?

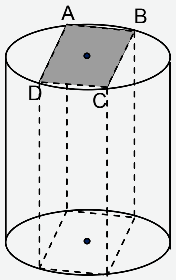
4. נתון גליל ריק שממלאים אותו בנוזלים בקצב אחיד וברציפות.
שרטטו סקיצה של גרף המתאר את הקשר בין זמן המילוי לגובה הנוזלים:



5. נתונים שני כלים.



I. גליל בתוך תיבה:
5 ס"מ = r, ‏12 ס"מ = h

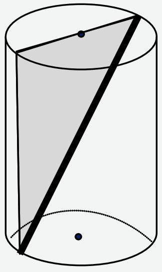


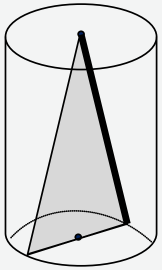
II. תיבה ריבועית בתוך גליל:
ריבוע ABCD
שאורך צלעו 8 ס"מ
12 ס"מ = h

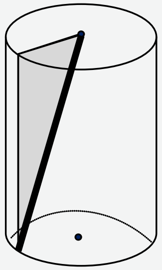
חשבו את נפח הגליל ונפח התיבה של כל אחד מהכלים.

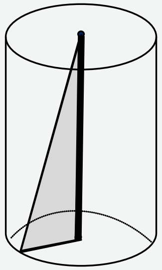
6. א. נתונים 4 גלילים שמידותיהם שוות. בתוך הגלילים משולשים שונים.
באיזה מהמשטחים של המשולשים הצלע המובלטת היא הקצרה ביותר?
הארוכה ביותר? נמקו.

ב. נתוני הגליל: 4 ס"מ = r, ‏10 ס"מ = h
חשבו את נפח הגליל; חשבו את שטחי המשולשים, ואת אורך הצלע המובלטת בכל משולש.


א


ב


ג


ד

7. דרור רצה לקנות צנצנת דבש. בחנות למוצרי טבע שאליה הלך דרור, נמכר דבש בצנצנות שצורתן גליל. דרור מצא שני גדלים של צנצנות. צנצנת אחת הייתה גבוהה פי שניים מהשנייה, אבל קוטר בסיסה היה פי שניים קטן יותר. שתי הצנצנות היו מלאות בדבש. מחירה של הצנצנת הגבוהה הוא 13 שקלים ומחירה של הצנצנת הנמוכה הוא 20 שקלים. איזו צנצנת יבחר דרור, אם רצונו לקנות את הדבש במחיר הנמוך ביותר ליחידת נפח? הסבירו.

מתמטיקה - תוכנית הלימודים לכיתה ט

הנחיות כלליות

עקרונות:

א. לימודי המתמטיקה בכיתה ט חותמים את לימודי המתמטיקה בחטיבת הביניים, ומשלימים את הנחת התשתית לקראת לימודי המתמטיקה בתיכון.

ב. הגישה בכיתה ט היא פורמאלית יותר מאשר בכיתות ז-ח, ויחד עם זאת מקפידה על שמירת איזון בין גישה אינטואיטיבית לבין פיתוח יכולות טכניות.

ג. בלימודי ה**גאומטריה** התלמידים לומדים לראשונה להוכיח משפטים במסגרת היסקית המושתתת על הנחות יסוד והגדרות. במסגרת זו הם גם לומדים להתנסח באופן פורמאלי.

ד. בלימודי ה**אלגברה** יש להתייחס לנקודות הבאות:

  1. יש להדגיש את כוחה של האלגברה כאמצעי להסבר של תופעות מספריות ולהכללה של חוקים מתמטיים.
  2. יש להדגיש את אופן השימוש בסמלים אלגבריים בתיאור מבני של תופעות מתמטיות, ובמידול של בעיות. יש לדון באופן שבו בחירת המשתנים משפיעה על יכולתנו להבין את אותן תופעות ולפתור את אותן בעיות.
  3. יש לעסוק באלגברה כתחום מתמטי שבו מוכיחים משפטים על סמך נתונים, כללי היסק ויישום של חוקים אלגבריים.

ה. בכל מקום שבו הדבר אפשרי, יש לשוב ולתרגל נושאי תוכן משנים קודמות.

ו. משימות אורייניות ועיבוד נתונים ישולבו בכל פרק לימוד שבו הדבר אפשרי.

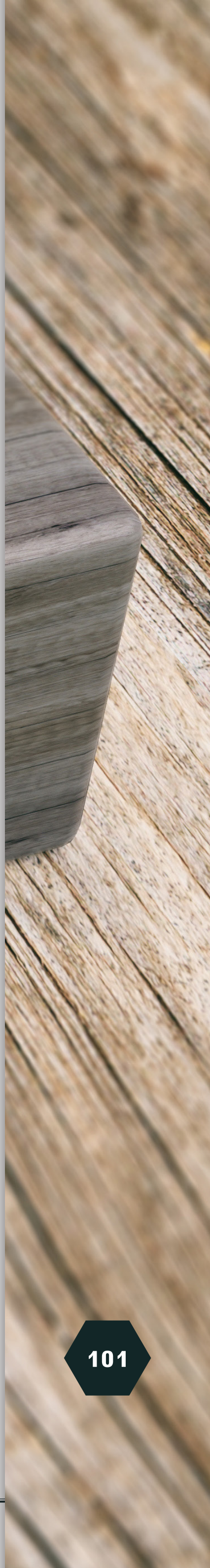
מבנה התוכנית:

ז. תוכנית הלימודים לכיתה ט נחלקת לשני תחומים: אלגברה (כולל הסתברות) וגאומטריה. יש ללמד שני תחומים אלה במקביל.

ח. סדר הפרקים כפי שמופיע בכל תחום בתוכנית הלימודים אינו מחייב, ובלבד שיישמר מבנה קדימויות לוגי.

ט. תוכנית זו מוגשת בהיקף ובהעמקה התואמים את הנדרש מתלמידי הקבצות א.

י. החלקים המסומנים באפור מיועדים לתלמידים מתקדמים.



סדר הנושאים המומלץ ומספר שעות הלימוד:

אלגברה (כולל הסתברות)	מספר שעות
חזקות ושורשים	20
הסתברות	15
טכניקה אלגברית	20
פונקציות ריבועיות	30
שימושים באלגברה	5
סך הכל	**90**

גאומטריה	מספר שעות
דלתון ומשולש שווה שוקיים	10
בניות בסיסות	12
ישרים מקבילים וטרפז	8
מקבילית ותכנים נוספים שאפשר להוכיח באמצעות תכונותיה	10
מלבן ותכנים נוספים שאפשר להוכיח באמצעות תכונותיו	8
הוכחה על דרך השלילה	4
מעוין וריבוע	8
סך הכל	**60**

תחום אלגברי והסתברות

1. חזקות ושורשים (20 שעות)

א. חזקות עם מעריך טבעי

פרק החזקות הנלמד בכיתה ט הוא הרחבה של פרק החזקות הנלמד בכיתה ז, ומשלב נושאים נוספים שנלמדו בעבר (למשל: זיהוי חוקיות, גאומטריה, גרפים ופונקציות). פרק זה מניח בסיס ללימוד עתידי של הפונקציה המעריכית, סדרות הנדסיות, טכניקה אלגברית וחקר תופעות של גדילה ודעיכה. לימוד חזקות הוא הזדמנות להפגיש תלמידים עם פונקציות שאינן ליניאריות ושאינן ריבועיות.

חזקה (שבה המעריך הוא מספר טבעי) היא כפל חוזר: $a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\ldots\ldots a}_{\text{ח פעמים}}$

לפרמטר a קוראים **בסיס החזקה**, ולפרמטר n קוראים **מעריך החזקה**.

בפרט, מגדירים: $\mathbf{a^1 = a}$

דגשים:

1. מומלץ לדעת בעל פה חזקות ריבועיות מ-12 ועד 202 וחזקות של 2 עד 210.
2. יש לחזור ולתרגל את סדר פעולות החשבון בביטויים שבהם יש חזקות, כפל, חילוק, חיבור וחיסור.
3. יש לשלוט בכתיבה מדעית של מספרים גדולים באמצעות חזקות של 10.
4. כאשר בסיס החזקה הוא מספר שלילי אזי הביטוי הוא חיובי במקרה שמעריך החזקה הוא זוגי, ושלילי במקרה שמעריך החזקה הוא אי-זוגי.
5. יש להכיר ולשלוט בחוקי החזקות כשהמעריכים הם מספרים טבעיים, ולדעת לנמק אותם בהסתמך על חוקי החילוף והקיבוץ של הכפל והחילוק.

   רשימת החוקים שיש להכיר היא:

$$a^n\cdot a^k = \underbrace{a\cdot\ldots\ldots\cdot a}_{\text{n פעמים}}\cdot\underbrace{a\cdot\ldots\ldots\cdot a}_{\text{k פעמים}} = a^{n+k}$$

$$\frac{a^n}{a^k} = \frac{\underbrace{a\cdot\ldots\ldots\cdot a}_{\text{n פעמים}}}{\underbrace{a\cdot\ldots\ldots\cdot a}_{\text{k פעמים}}} = a^{n-k} \qquad (n > k\ ,\ a \neq 0)$$

$$(a^n)^k = \underbrace{a^n\cdot\ldots\ldots a^n}_{\text{k פעמים}} = a^{nk}$$

$$(ab)^n = \underbrace{ab\cdot\ldots\ldots\cdot ab}_{\text{n פעמים}} = \underbrace{a\cdot\ldots\ldots\cdot a}_{\text{n פעמים}}\cdot\underbrace{b\cdot\ldots\ldots\cdot b}_{\text{n פעמים}} = a^n\cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b}\cdot\ldots\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{\text{n פעמים}} = \frac{\overbrace{a\cdot\ldots\ldots\cdot a}^{}_{\text{n פעמים}}}{\underbrace{b\cdot\ldots\ldots\cdot b}_{\text{n פעמים}}} = \frac{a^n}{b^n} \qquad (b \neq 0)$$

6. אם בסיס החזקה הוא מספר הגדול מ- 1 ומעריך החזקה הוא מספר טבעי הגדול מ-1, אזי הביטוי גדול מבסיס החזקה.
אם בסיס החזקה הוא מספר בין 0 ל- 1 ומעריך החזקה הוא מספר טבעי הגדול מ-1, אזי הביטוי קטן מבסיס החזקה.
7. יש לשלב חזקות בביטויים מספריים ובביטויים אלגבריים.
8. יש ללמוד להציג מספר טבעי כמכפלה של חזקות של מספרים ראשוניים.
9. יש להכיר את הגרף של הפונקציה: $y = a^n$ (n טבעי, $a > 0$) ולהבין את ההבדל בקצב הגדילה בין גרפים בעלי בסיסי חזקה שונים. בפרט, יש להבין את ההבדל בין גידול ליניארי וגידול מעריכי באמצעות דוגמאות מספריות. יש לדון בקושי שבחלוקת הציר לשנתות בשרטוט גרף של פונקציה מעריכית.
10. יש לבטא יחידות מידה שונות באמצעות כתיב חזקות.

ב. הרחבת מושג החזקה למעריכים שהם אפס או מספרים שליליים שלמים

$a^0=1$ $(a\neq0)$, $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ $(a\neq0)$

דגשים:

1. יש להציג חזקות עם מעריך שהוא אפס ועם מעריכים שהם מספרים שליליים שלמים בכמה אופנים, באופן שיבהיר את המניע להגדרות אלה. למשל:
   א. באמצעות התבוננות בסדרת השוויונות:

$$\begin{aligned} 2^4 &= 16 \\ &\downarrow :2 \\ 2^3 &= 8 \\ &\downarrow :2 \\ 2^2 &= 4 \\ &\downarrow :2 \\ 2^1 &= 2 \\ &\downarrow :2 \\ 2^0 &= 1 \\ &\downarrow :2 \\ 2^{-1} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   ב. באמצעות התבוננות בזהות $\frac{a^n}{a^k}=a^{n-k}$. זהות זו מוכרת כבר עבור n > k. עתה, אם נציב n = k נקבל $a^0 = 1$ ואם נציב n = 0 נקבל $a^{-k}=\frac{1}{a^k}$
2. יש להוכיח, לאור ההגדרות לעיל, שחוקי החזקות נשארים תקפים גם עבור מעריכים שליליים או מעריך שהוא אפס (אין חובה לכסות את כל המקרים).
3. יש לשלוט בכתיבה מדעית של מספרים (חיוביים) קטנים.

4. $0^{\text{ח}}$ שווה לאפס עבור כל ח טבעי.

$0^{\text{ח}}$ אינו מוגדר עבור 0 > ח, עובדה המתקשרת להיעדר הגדרה של חילוק באפס.

$0^{\text{ח}}$ אינו מוגדר עבור 0 = ח, אבל אין בשלב זה כלים לנמק זאת.

5. יש לקשר בין חזקות שבהן המעריך הוא מספר שלילי לבין יחידות מידה וקצבי דעיכה, ויש לפתח בתלמידים תובנה מספרית לדעיכה מעריכית.
6. יש לשלב חזקות בביטויים מספריים ובביטויים אלגבריים.

ג. שורשים ריבועיים

פרק זה הוא המשך לפרק על שורשים ריבועיים הנלמד בכיתה ח, ומהווה הכנה ללימוד המשוואה הריבועית. לכל מספר a שאינו שלילי, $s = \sqrt{a}$ הוא המספר היחיד המקיים $s \geq 0$ ו- $s^2 = a$.

דגשים:

1. שורש ריבועי של מספר שקטן מאפס אינו מוגדר.
2. יש ללמוד לחשב שורש ריבועי באמצעות מחשבון, ולהבחין בין הערך המקורב המתקבל לבין הערך האמיתי.
3. מהגדרת השורש הריבועי נובע כי: $\sqrt{a^2} = |a|$ לכל a ו- $(\sqrt{a^2}) = a$ לכל $a \geq 0$
4. יש להכיר את הזהויות: $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ $(0 \geq a ,0 \geq a)$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (a) , $\sqrt{a^k} = (\sqrt{a})^k$ (טבעי k ,$0 \geq a$, $b > 0$)

ולדעת לבסס אותן על חוקי חזקות. הזהות הראשונה, למשל, מבוססת על השוויון $(xy)^2 = x^2y^2$ כך: $(\sqrt{a \cdot b})^2 = a \cdot b = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2$.

5. יש ללמוד להשתמש במשפט פיתגורס כדי לתת ייצוג גאומטרי לשורשים ריבועיים, למשל לבנות קטעים באורכים $\sqrt{7}, \sqrt{6}$.

2. הסתברות (15 שעות)

מבוא

1. הסתברות היא תחום תוכן העוזר בקבלת החלטות מושכלות. לעתים קרובות אדם נאלץ לקבל החלטות בתנאי חוסר ודאות, ושיקולים הסתברותיים עוזרים לשקלל סיכויים וסיכונים עד לקבלת החלטות מיטביות.
2. בכיתה ח למדו התלמידים את המשמעות של ההסתברות הן כמדד למידת ההיתכנות שאדם מייחס להתרחשות מאורע, והן כשכיחות היחסית של המאורע בעת שחוזרים על אותו הניסוי מספר רב של פעמים. הם למדו לחשב הסתברויות של מאורעות בניסויים שבהם קיימת סימטרייה ניכרת לעין בין כל תוצאות הניסוי, ולכן מניחים שכל התוצאות הן שוות הסתברות.
3. התכנים המרכזיים הנוספים בכיתה ט הם:

א. הסתברות מותנית: כשנוסף מידע חלקי על תוצאת הניסוי, אזי ההסתברות המיוחסת למאורע יכולה להשתנות.

ב. מושג האי-תלות והשימוש בו בחישוב הסתברויות;

ג. חישוב הסתברויות של איחוד וחיתוך של כמה מאורעות, במקרים שבהם הנתונים מאפשרים זאת (מאורעות זרים, מאורעות בלתי תלויים, או מאורעות תלויים שבהם אפשר לחשב הסתברות מותנית).

מטרת הלימוד היא פיתוח אינטואיציה להתניה ואי-תלות, לצד המשך פיתוח יכולת החישוב. יש לגשת לפתרון שאלות בדרך אינטואיטיבית, ולהימנע מהצבה מכנית בנוסחאות.

א. הסתברות מותנית

הסתברות משקפת את מידת ההיתכנות שאדם מייחס להתרחשות מאורע, כשהוא מנצל באופן מושכל את מלוא המידע שברשותו. ההסתברות להתרחשות מאורע יכולה להשתנות כשהמידע שבידי האדם משתנה. להסתברות של מאורע כשידוע שמאורע אחר התרחש קוראים **הסתברות מותנית**.

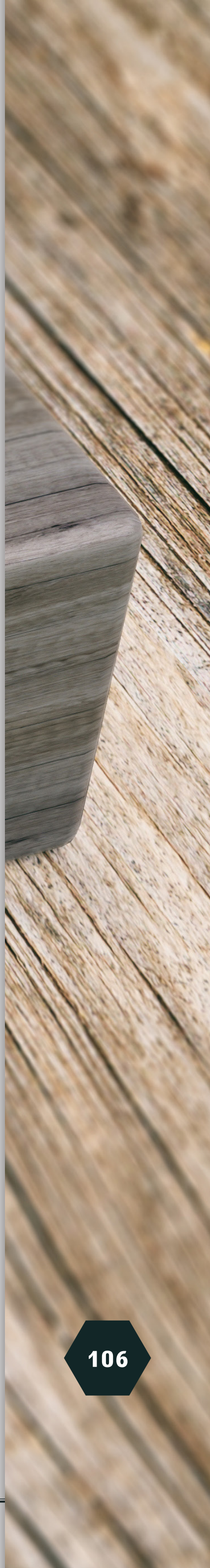
דגשים:

1. יש להציג מגוון של דוגמאות שבהן שינוי במידע משנה את ההסתברות המיוחסת להתרחשות מאורע. בשלב ראשון, על העיסוק להיות איכותני, ולהסתפק בקביעה האם המידע הנוסף הגדיל, הקטין או לא שינה את ההסתברות.
2. תוספת של מידע מצמצמת את התוצאות האפשריות שלהן אפשר לצפות, וכתוצאה מכך יש לשקלל מחדש את ההסתברויות שמיוחסות למאורעות שונים. אפשר להדגים תופעה זו באמצעות שכיחויות יחסיות. למשל: אם מטילים קובייה מספר רב של פעמים, השכיחות היחסית של התוצאה 4 תהיה קרובה ל- 1/6. אבל אם נתבונן רק באותן הטלות שבהן תוצאת ההטלה הייתה זוגית, הרי שהשכיחות היחסית של התוצאה 4 תהיה קרובה ל- 1/3. מכאן שההסתברות לתוצאה 4 היא 1/6, אבל אם ידוע מראש שהתוצאה תהיה זוגית, אזי ההסתברות לתוצאה 4 היא 1/3. במקרה זה נאמר: ההסתברות המותנית של התוצאה 4, כשידוע שהתוצאה תהיה זוגית, היא 1/3.
3. יש לתרגל מגוון של דוגמאות שבהן אפשר לחשב באופן כמותי את השתנות ההסתברות כתוצאה ממידע נוסף.

ב. הסתברות של שני מאורעות

דגשים:

1. אם השכיחות היחסית של מאורע אחד (כשחוזרים על אותו ניסוי מספר רב של פעמים) היא a, ומבין כל הפעמים שבהן התקיים מאורע זה השכיחות היחסית של מאורע אחר היא b, אזי השכיחות היחסית של הפעמים שבהן התקיימו שני המאורעות יחדיו היא המכפלה ab (יש לקשר בין עובדה זו ובין המשמעות של כפל שברים קטנים מ-1).
2. מסעיף 1 נובע כי ההסתברות ששני מאורעות יתרחשו יחדיו שווה למכפלת ההסתברות שהמאורע הראשון יתרחש בהסתברות שהמאורע השני יתרחש, כשזו מותנית בכך שהמאורע הראשון התרחש.
3. יש ללמוד לחשב, על סמך סעיף 2, את ההסתברות ששני מאורעות יתרחשו יחדיו.
4. יש ללמוד למַדל ולארגן נתונים הסתברותיים באמצעות מודלים כדוגמת עץ ושטח, וללמוד להשתמש במודלים מגוונים לפתרון בעיות.



5. ההסתברות ששני מאורעות יתרחשו יחדיו אינה יכולה להיות גדולה מההסתברות הנפרדת של כל מאורע. יש לנמק עובדה זו הן באמצעות שיקולים אינטואיטיביים, והן בהסתמך על הקשר שבין הסתברות ששני מאורעות יתרחשו יחדיו לבין הסתברות מותנית.

ג. הסתברות של מאורעות זרים, הסתברות של מאורעות בלתי תלויים והסתברות של מאורעות תלויים

דגשים:

1. שני מאורעות הם **זרים** אם לא ייתכן ששניהם יתרחשו יחדיו.
2. שני מאורעות הם **בלתי תלויים** אם הידיעה על התרחשות האחד אינה משנה את ההסתברות להתרחשות האחר. שני מאורעות שאינם בלתי תלויים נקראים **תלויים**.
3. במצבים שבהם האקראיות של שני מאורעות היא ממקורות שונים, המאורעות הם בלתי תלויים.
4. אם שני מאורעות הם זרים, אזי ההסתברות שהאחד יתרחש כשידוע שהאחר התרחש היא אפס. מכאן נובע ש:
   א. המאורעות הם **תלויים**, כלומר הידיעה מראש שהאחד התרחש משפיעה על ההסתברות להתרחשותו של האחר.
   ב. ההסתברות ששניהם יתרחשו יחדיו היא אפס.
5. אם שני מאורעות הם בלתי תלויים, אזי ההסתברות שהאחד יתרחש כשידוע מראש שהאחר התרחש שווה להסתברות שהוא יתרחש גם ללא המידע על התרחשות המאורע האחר. נובע מכאן שההסתברות ששניהם יתרחשו יחדיו היא מכפלת ההסתברויות שלהם.
6. אם שני מאורעות הם זרים, אזי ההסתברות שלפחות אחד מהם יתרחש היא סכום ההסתברויות שלהם. אם שני מאורעות אינם זרים, אזי ההסתברות שלפחות אחד מהם יתרחש קטנה מסכום ההסתברויות של שניהם.
7. הסתברות שלפחות אחד משני מאורעות יתרחש אינה יכולה להיות קטנה מההסתברות הנפרדת של כל אחד מהם.
8. יש לתרגל תכנים אלה באמצעות דוגמאות מחיי היומיום.
9. אפשר להרחיב תכונות אלה עבור יותר משני מאורעות, ובפרט עבור ניסויים חוזרים בלתי תלויים.

3. טכניקה אלגברית (20 שעות)

א. נוסחאות הכפל (מכפלת דו איבר בדו איבר):

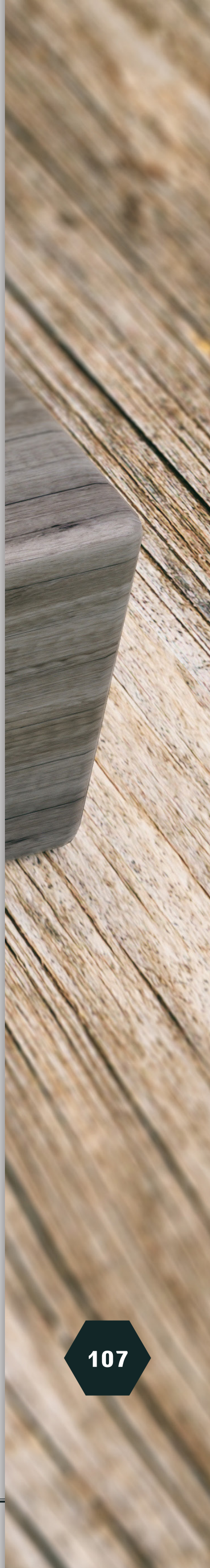
$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

פתיחת סוגריים, פירוק לגורמים ופתרון משוואות ריבועיות באמצעות השלמה לריבוע

נוסחאות הכפל הן מרכיב חשוב בטכניקה אלגברית ואריתמטית. נוסחאות אלה משמשות את התלמידים בפירוק לגורמים, בחקר של תופעות מספריות ובפתרון משוואות ריבועיות.



דגשים:

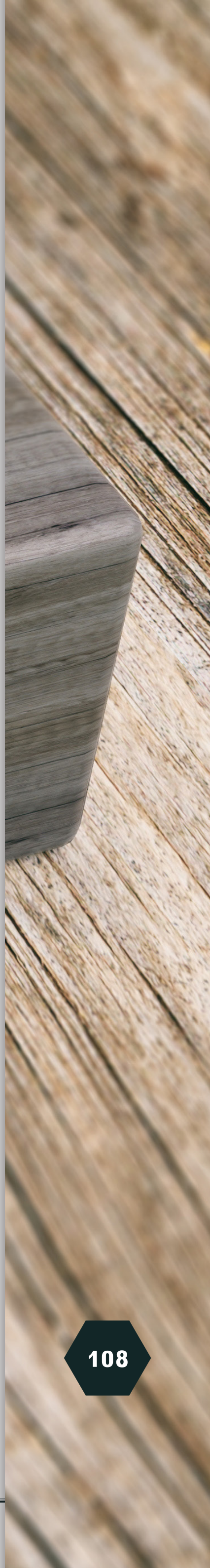
1. יש לפתח את נוסחאות הכפל באמצעים אלגבריים, ולהדגים אותן באמצעים גאומטריים (עבור מספרים חיוביים).
2. יש להרגיל את התלמידים להשתמש בנוסחאות הכפל בשני אופנים: בפתיחת סוגריים ובפירוק לגורמים.
3. יש ללמוד להשתמש בנוסחאות הכפל בפתרון בעיות חשבוניות, כולל בחישוב מנטאלי, וכן יש להראות כיצד שימוש בסמלים אלגבריים מקנה שיטות מהירות ויעילות לביצוע חישובים אריתמטיים.
4. יש ללמוד לצמצם שברים אלגבריים באמצעות פירוק לגורמים ובאמצעות נוסחאות הכפל.
5. אם $a^2 = b^2$ אזי $a = b$ או: $a = -b$. אפשר להסיק זאת מהזהות הבאה: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)= 0$
6. א. יש להראות כיצד פיתוח הביטוי $(a - b)^2$ נובע מהצגתו כ- $(a + (-b))2$.
   ב. יש להראות כיצד פיתוח הביטוי $(a - b)3$ נובע מהצגתו כ- $(a + (-b))3$.
7. יש ללמוד להשלים תלת-איבר $x^2 + bx + c$ לריבוע.
8. יש ללמוד לפתור משוואות ריבועיות באמצעות ההשלמה לריבוע שבסעיף 7.

ב. פירוק של תלת-איבר ריבועי (טרינום ריבועי) $x^2 + bx + c$ ופתרון משוואות ריבועיות

המטרה בסעיף זה היא ללמוד לפרק תלת-איבר ריבועי למכפלה של דו-איברים ליניאריים במקרים שבהם זה אפשרי. פירוק זה שימושי בפתרון משוואות ריבועיות ובצמצום שברים.
שימו לב: הביטוי $x^2 + bx + c$ ייחשב תלת-איבר ריבועי גם אם b ו/או c שווים לאפס.

דגשים:

1. נוסחאות הכפל הן מקרה פרטי של פירוק תלת-איבר.
2. כהטרמה ללימוד פירוק תלת-איבר כדאי לעסוק בפירוק לפי קבוצות (ראו דוגמה 1 בנספח). יש לעסוק בדוגמאות שבהן המקדם של האיבר הריבועי הוא 1.
3. בשלב זה, פירוק של תלת-איבר מבוסס על ניסוי וטעייה, שבו יש למצוא שני מספרים שסכומם b ומכפלתם c. בהמשך תילמד דרך המבוססת על נוסחת השורשים.
4. פירוק תלת-איבר משמש בפתרון משוואות ריבועיות. יש להרגיל את התלמידים לבדוק את נכונות הפתרונות באמצעות הצבה.
5. פירוק לגורמים שימושי בצמצום שברים אלגבריים וכן בכפל או בחילוק של שברים אלגבריים.
6. יש לעסוק במשוואות רציונאליות שאפשר לפתור באמצעות פירוק המכנה לגורמים.
7. תחומי הצבה של שברים אלגבריים יכולים להשתנות כתוצאה מצמצום השבר. יש ללמד את התלמידים שתחום ההצבה נקבע על פי הביטוי המקורי. יש ללמוד להבחין בהבדלים בין הביטוי המקורי ובין הביטוי המצומצם באופן גרפי, ולהבליט הבדלים אלה אם הם אינם נראים לעין.



4. פונקציות ריבועיות (30 שעות)

א. הפונקציה $f(x) = x^2$ והייצוג הגרפי שלה

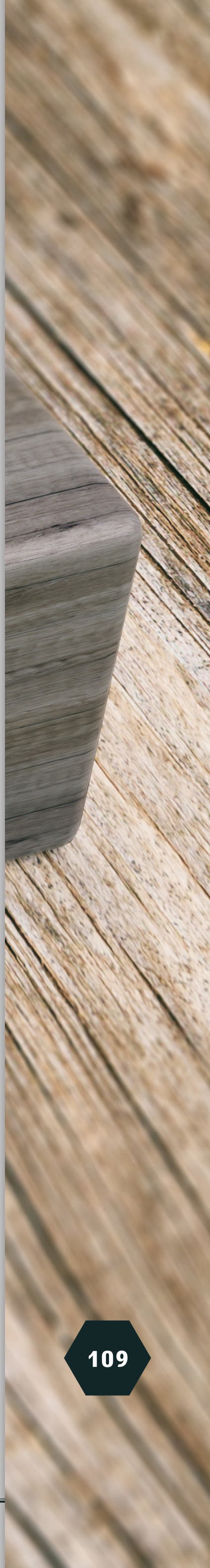
דגשים:

1. סעיף זה הוא הכנה ללימוד פונקציה ריבועית כללית.
2. יש לשרטט את גרף הפונקציה $f(x) = x^2$ באמצעות טבלת ערכים והשלמה מקורבת לעקום רציף. צורת הגרף מכונה **פרבולה**.
3. יש לקשר בין הסימטרייה השיקופית של הפרבולה ובין ביטויה האלגברי: $f(-x) = f(x)$.
4. ראשית הצירים היא נקודת המינימום של הגרף, והיא מכונה **קדקוד הפרבולה**. הקדקוד ממוקם על ציר הסימטרייה, שהוא ציר y.
5. יש לפתור משוואות מהצורה x2 = m באמצעים אלגבריים וגרפיים (מפגש של פרבולה עם קו אופקי). במקרים שבהם m הוא שלילי, יש לקשור את היעדר הפתרון להיעדר נקודת חיתוך בין הגרפים ולהיעדר שורש למספר שלילי.
6. יש ללמוד באילו תנאים יש למשוואה מהצורה x2 = m שני פתרונות, באילו תנאים יש לה פתרון אחד, ובאילו תנאים אין לה פתרון כלל.
7. גרף הפונקציה יורד בתחום $x < 0$ ועולה בתחום $x > 0$.
8. עבור x חיובי, קצב הגידול של הפונקציה גדול יותר ככל ש- x גדול יותר. אפשר לראות זאת באמצעות חישובים מספריים (הפרשים בין ערכי הפונקציה עבור ערכים שהפרשם שווה: 1, 2, 3 וכו') ובאמצעות הייצוג הגרפי.
9. מידת ההשתנות של y כש-x גדל בתוספת קבועה אינה אחידה, להבדיל ממידת ההשתנות בפונקציה קווית.

ב. פונקציות מהצורה $f(x) = ax^2$ כאשר $a \neq 0$ – מתיחה, כיווץ ושיקוף

דגשים:

1. יש לשרטט את הגרף של הפונקציה f(x) = ax2 עבור כמה ערכים של a בתחומים $a < 0, 0 < a < 1, a > 1$ באמצעות טבלת ערכים והשלמה מקורבת לעקום רציף. כל הגרפים הללו הם פרבולות.
2. ציר y הוא ציר הסימטרייה של כל הפרבולות מצורה זו.
3. הגרפים של הפונקציות: $f(x) = ax^2$ ו־$f(x) = -ax^2$ הם סימטריים ביחס לציר ה- x.
4. ראשית הצירים היא הקדקוד של כל הפרבולות הללו; היא נקודת מינימום כש- $a > 0$ ונקודת מקסימום כש- $a < 0$.
5. יש לשרטט על אותה מערכת צירים כמה פרבולות מהצורה $y = ax^2$ במטרה לראות כיצד שינוי בערך של a מתבטא במתיחה או בכיווץ אנכיים של הפרבולה.
6. יש לפתור משוואות מהצורה $ax^2 = m$ או $ax^2 = bx^2$ באמצעים גרפיים ואלגבריים.



ג. פונקציות מהצורה $f(x) = ax2 + c$ כאשר $a \neq 0$ - הזזות אנכיות

דגשים:

1. יש לשרטט גרפים של פונקציות מהצורה $f(x) = ax^2 + c$ עבור ערכים שונים של a ו- c. מכיוון שגרפים אלה הם הזזות של הגרף $f(x) = ax^2$ גם הם **פרבולות**.
2. הגרף של הפונקציה $f(x) = ax^2 + c$ מתקבל מהגרף של הפונקציה $g(x) = ax^2$ על ידי הזזה אנכית של כל נקודה בשיעור קבוע, c.
3. ציר y הוא ציר הסימטרייה של כל הפרבולות מצורה זו. הקדקוד ממוקם בנקודה (c,0).
4. קצב השינוי של הפונקציה $f(x) = ax^2 + c$ בתחום נתון אינו תלוי בערך של הפרמטר c.
5. יש לפתור משוואות מהצורה $ax^2 + c = m$ באמצעים אלגבריים ובאמצעות זיהוי נקודות חיתוך של גרפים של שתי פונקציות (פרבולה וישר מקביל לציר ה- x). כמו כן, יש ללמוד להסביר באמצעים אלגבריים וגרפיים באילו מקרים יש למשוואה מהצורה $ax^2 + c = m$ שני פתרונות, באילו מקרים יש לה פתרון יחיד, ובאילו תנאים אין לה כלל פתרון.
6. יש לעסוק בתחומי החיוביות / שליליות של פונקציות מסוג זה עבור מגוון הסימנים האפשריים של הפרמטרים a ו- c.

ד. הרכבה של הזזות אופקיות, אנכיות, מתיחה וכיווץ של הפונקציה $f(x) = x^2$

פונקציות שהביטוי האלגברי שלהן הוא: $t(x) = a(x - p)^2 + k$, $m(x) = a(x - p)^2$, $g(x) = (x - p)^2$ (כאשר $a \neq 0$)

דגשים:

1. יש לשרטט גרפים של פונקציות מהצורה $g(x) = (x - p)^2$ עבור ערכים שונים של p. הפרבולה המתאימה לפונקציה $g(x) = (x - p)^2$ מתקבלת מהזזה אופקית של הפרבולה $f(x) = x^2$ ב- p יחידות. מכיוון שגרפים אלה מתקבלים מהזזות של הגרף $f(x) = ax^2$, הרי שגם הם **פרבולות**.
2. ציר הסימטרייה של גרף הפונקציה $g(x) = (x - p)^2$ הוא $x = p$, והקדקוד ממוקם בנקודה (p,0).
3. פרבולות מהצורה $y = a(x - p)^2$ מתקבלות מהזזה אופקית של הפרבולה $y = ax^2$ או ממתיחה של הפרבולה $y = (x - p)^2$.
4. פרבולות מהצורה $y = a(x - p)^2 + k$ מתקבלות מהזזה אנכית של הפרבולה $y = a(x - p)^2$.
5. פרבולות מהצורה $y = a(x - p)^2 + k$ מתקבלות מהזזה אופקית, שאחריה מתיחה והזזה אנכית של הפרבולה $y = x^2$.
6. בפונקציות מהצורה $y = a(x - p)^2 + k$ ציר הסימטרייה הוא $x = p$, שיעורי הקדקוד הם (p,k), והסימן של המקדם a מעיד אם לפרבולה יש נקודת מינימום או נקודת מקסימום.
7. יש לדעת למצוא תחומי חיוביות ושליליות לפונקציות מהצורה $y = a(x - p)^2 + k$.

ה. הרכבה של הזזות אופקיות, אנכיות, מתיחה וכיווץ של הפונקציה $f(x) = x^2$

פונקציות שהביטוי האלגברי שלהן הוא: $g(x) = (x - p)^2, m(x) = a(x - p)^2, t(x) = a(x - p)^2 + k$ (כאשר $a \neq 0$)

דגשים:

1. יש לשרטט גרפים של פונקציות מהצורה $g(x) = (x - p)^2$ עבור ערכים שונים של p. הפרבולה המתאימה לפונקציה $g(x) = (x - p)^2$ מתקבלת מהזזה אופקית של הפרבולה $f(x) = x^2$ ב– p יחידות. מכיוון שגרפים אלה מתקבלים מהזזות של הגרף $f(x) = ax^2$, הרי שגם הם **פרבולות**.
2. ציר הסימטרייה של גרף הפונקציה $g(x) = (x - p)^2$ הוא $x = p$, והקדקוד ממוקם בנקודה $(p,0)$.
3. פרבולות מהצורה $y = a(x - p)^2$ מתקבלות מהזזה אופקית של הפרבולה $y = ax^2$ או ממתיחה של הפרבולה $y = (x - p)^2$.
4. פרבולות מהצורה $y = a(x - p)^2 + k$ מתקבלות מהזזה אנכית של הפרבולה $y = a(x - p)^2$.
5. פרבולות מהצורה $y = a(x - p)^2 + k$ מתקבלות מהזזה אופקית, שאחריה מתיחה והזזה אנכית של הפרבולה $y = x^2$.
6. בפונקציות מהצורה $y = a(x - p)^2 + k$ ציר הסימטרייה הוא $x = p$, שיעורי הקדקוד הם (p,k), והסימן של המקדם a מעיד אם לפרבולה יש נקודת מינימום או נקודת מקסימום.
7. יש לדעת למצוא תחומי חיוביות ושליליות לפונקציות מהצורה $y = a(x - p)^2 + k$.

ו. הפונקציה הריבועית וייצוגיה האלגבריים השונים

פונקציה ריבועית היא פונקציה שאפשר להציגה כ:

$f(x) = ax^2 + bx + c$ כאשר $a \neq 0$. ייצוג זה נקרא **ייצוג סטנדרטי** של פונקציה ריבועית.

בנוסף לייצוג הסטנדרטי של הפונקציה הריבועית קיימים ייצוגים נוספים:

ייצוג **קדקודי:** $g(x) = a(x - p)^2 + k$

ייצוג **כמכפלה:** $h(x) = a(x - t)(x - r)$

דגשים:

1. יש לדעת לעבור בין הייצוגים האלגבריים השונים של הפונקציה הריבועית בדוגמאות מספריות בלבד. המעבר מייצוג סטנדרטי לייצוג קדקודי ייעשה באמצעות השלמה לריבוע. המעבר מייצוג סטנדרטי לייצוג כמכפלה ייעשה באמצעות פירוק לגורמים, אולם מעבר זה אינו תמיד אפשרי. מעבר מייצוג קדקודי או מייצוג כמכפלה לייצוג סטנדרטי ייעשה באמצעות פתיחת סוגריים.
2. מעבר לייצוג כמכפלה ייעשה רק כש- $a = \pm 1$.
3. היתרון של ייצוג קדקודי הוא בזיהוי ציר הסימטרייה, בזיהוי הקדקוד ובזיהוי תחומי העלייה / הירידה של הפרבולה.
4. היתרון של הייצוג כמכפלה $h(x) = a(x - t)(x - r)$ הוא בזיהוי נקודות החיתוך עם ציר ה- x ובזיהוי תחומי חיוביות / שליליות.
5. יש לדעת למצוא את ציר הסימטרייה, את הקדקוד, את תחומי העלייה והירידה, את תחומי החיוביות והשליליות ואת נקודות החיתוך של הפרבולה עם הצירים באמצעות מעבר בין הייצוגים האלגבריים השונים.

6. אם פונקציה ריבועית מקבלת אותו ערך עבור x_1 ו- x_2 אזי ציר הסימטרייה הוא: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.
7. יש לשלב את העיסוק בפונקציה ריבועית עם העיסוק בפונקציה קווית.

ז. פתרון משוואות ריבועיות ופתרון שאלות מילוליות

משוואה ריבועית היא משוואה שאפשר להציגה בייצוג סטנדרטי $ax^2 + bx + c = 0$ כאשר $a \neq 0$.

דגשים:

1. המשמעות הגרפית של פתרון המשוואה הוא מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $y = ax^2 + bx + c$ עם ציר ה- x.
2. כל משוואה מהצורה:

$ax^2 + bx + c = rx + q$

$a(x - p)^2 + k = rx + q$

$a(x - n)(x - t) = rx + q$

היא משוואה ריבועית שאותה אפשר להעביר לייצוג סטנדרטי על ידי פתיחת סוגריים וריכוז כל הביטויים האלגבריים באגף אחד.

3. אם בייצוג הסטנדרטי $b = 0$, אזי המשוואה היא: $ax^2 + c = 0$, ואפשר לפתור אותה באמצעות בידוד x^2 והוצאת שורש ריבועי.
4. אם בייצוג הסטנדרטי $c = 0$, אזי המשוואה היא: $ax^2 + bx = 0$, ואפשר לפתור אותה באמצעות הוצאת גורם משותף.
5. כש- $b \pm 0$, $c \pm 0$, $a = \pm 1$ נלמדו עד כה שתי דרכים לפתרון:
   - א. פירוק של תלת-איבר ריבועי
   - ב. השלמה לריבוע
6. יש להראות באמצעות השלמה לריבוע כי השורשים של משוואה ריבועית הם:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{ו-} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

כשהביטוי שבתוך השורש (דיסקרימיננטה) אינו שלילי. כשהדיסקרימיננטה שלילית - אין למשוואה פתרונות.

מחישוב ממוצע השורשים נובע כי ציר הסימטרייה הוא $x = \frac{-b}{2a}$

7. דיסקרימיננטה שלילית מתקבלת במצבים שבהם הפרבולה $y = ax^2 + bx + c$ אינה חותכת את ציר ה- x. במצבים אלה אי אפשר לייצג את הפונקציה כמכפלה: $y = a(x - t)(x - r)$.
8. יש לעסוק גם בדוגמאות שבהן הפתרונות אי-רציונליים, ולשרש באמצעות דוגמאות את ההרגל לפיו יש לצפות תמיד לתוצאות 'עגולות'.
9. יש ללמוד לפתור משוואות ריבועיות במגוון דרכים, ויש לעודד את התלמידים לזהות דרכי פתרון יעילות למשוואה נתונה על פי אופן ייצוגה.
10. יש ללמוד למצוא נקודות חיתוך של הפרבולה $y = ax^2 + bx + c$ והישר $y = rx + q$ על ידי פתרון המשוואה: $ax^2 + bx + c = rx + q$.
    - א. אם קיימים שני פתרונות, אז יש שתי נקודות חיתוך.

ב. אם קיים פתרון יחיד, אז הישר משיק לפרבולה.

ג. אם לא קיים פתרון, אז אין נקודות חיתוך.

11. יש לעסוק בשאלות מילוליות הדורשות פתרון באמצעות משוואה ריבועית במגוון רחב של הקשרים, ובכללן שאלות העוסקות בגופים במרחב. יש לשים לב למצבים שבהם אחד הפתרונות אינו קביל בהקשר של השאלה המילולית.
12. יש ללמוד לפתור בעיות מינימום / מקסימום ריבועיות שאותן אפשר לפתור על ידי מציאת קדקוד של פרבולה.
13. יש לפתור משוואות ריבועיות שפתרונן יכול להיות מבוסס על הצבה של ביטוי אלגברי במקום x.

ח. אי-שוויונות ריבועיים

דגשים:

1. יש ללמוד לפתור אי-שוויונות ריבועיים מהצורה

$ax^2 + bx + c > 0$

$ax^2 + bx + c < 0$

$ax^2 + bx + c \geq 0$

$ax^2 + bx + c \leq 0$

$ax^2 + bx + c \neq 0$

(כאשר $a > 0$) באמצעות שרטוט סקיצה.

2. יש ללמוד לפתור אי-שוויונות ריבועיים מסוגים אלה גם כאשר $a < 0$ באמצעות סקיצה או באמצעות כפל האי-שוויון ב- -1.
3. יש ללמוד לפתור אי-שוויונות ריבועיים מהצורה $ax^2 + bx + c > rx + q$ באמצעות סקיצה של ייצוג גרפי.

ט. מערכת משוואות לא ליניאריות של שתי משוואות בשני נעלמים ופתרון שאלות מילוליות

נושא זה מקנה לתלמיד נקודת מבט נוספת על נושא שכבר למד, ומסכם מגוון של נושאים שנלמדו בתחום האלגברי.

דגשים:

1. יש ללמוד לפתור מערכות משוואות לא ליניאריות של שתי משוואות בשני נעלמים, במקרים שבהם אפשר לצמצם את המערכת למשוואה אחת שהיא לכל היותר ממעלה שנייה.
2. במידת האפשר, יש להיעזר בפתרונות גרפיים.
3. יש ללמוד לפתור שאלות מילוליות שמצריכות פתרון מערכות משוואות, כדוגמת אלה שהופיעו בדגש 1.

5. שימושים באלגברה (5 שעות)

פרק זה נועד לסכם את המושגים, התכונות והחוקים שנלמדו באלגברה, במטרה לבסס פרספקטיבה וחוש ביחס לשאלה מהי אלגברה ומהם שימושיה המגוונים, תוך הדגשת עצמתה ככלי מתמטי. מוצע לממש מטרה זו באמצעות עבודה על סוגים שונים של מטלות שבהן התלמידים עוסקים ודנים בייצוג / מידול סימבולי של בעיות מתחומים שונים לצורך פתרונן, ובהבנה וניתוח של ביטויים סימבוליים, חקר תופעות מספריות שונות (כלליות או כאלה שמתקיימות רק במקרים ייחודיים), והבנה ויצירה של הוכחות אלגבריות פשוטות.

דגשים:

1. יש לראות כיצד בחירות שונות של משתנה לייצוג בעיה משפיעות על פתרונה.
2. מומלץ לחזור ולהתבונן בחישובים אריתמטיים תוך הישענות על חוקים אלגבריים.
3. יש לאמץ את האלגברה ככלי זמין וכללי לחקר / לימוד של תופעות מספריות.
4. יש ללמוד לקרוא ביטויים אלגבריים קריאה תבניתית, וללמוד לפרש אותם בהתאם (למשל: על מנת לייעל חישובים, להפיק מידע וכו').
5. יש להבין ולדעת ליצור הוכחות פשוטות באלגברה.
6. יש לשלב יישומים של טכניקה אלגברית עם הפעלת שיקולי משמעות.
7. יש לשלב בין אלגברה לבין גאומטריה.

תחום גאומטרי

מבוא

אחת המטרות המרכזיות של לימודי הגאומטריה בכיתה ט היא היכרות עם מערכת היסק (דדוקטיבית) ולימוד מיומנויות היסק.

סדר התכנים נקבע כך שלימוד מיומנויות ההיסק ייעשה באופן מדורג, וכך שכל תוכן יהיה מבוסס באופן היררכי על תכנים שנלמדו לפניו. אפשר ללמד תכנים אלה גם בסדר אחר מזה המוצע בתוכנית, ובלבד שיתקיימו שני התנאים הבאים:

א. קיום סדר הגיוני במבנה ההיסקי של התכנים הנלמדים;

ב. שימור סדר לימוד מיומנויות ההיסק כפי שאלה באות לידי ביטוי בתוכנית; מיומנויות אלה מפורטות בכל סעיף בנפרד.

1. בכיתות ז-ח נלמדה גאומטריה בגישה קדם-היסקית, ששילבה פיתוח אינטואיציה באמצעים מוחשיים ונימוק טענות באופן לא פורמאלי. כמו כן, הושם דגש על תכנים חישוביים. לימודי הגאומטריה בכיתה ט מסיטים את הדגש אל הגישה ההיסקית, תוך הדגשה של הפן הלוגי-פורמאלי. האיזון עם הגישה הקדם-היסקית נשמר באמצעות הישענות על תשתית הידע שהצטברה בכיתות ז-ח (ראו סעיף 5). יש להדגיש כי השיקולים הלא פורמאליים אינם נזנחים, והם ממשיכים להיות חלק מדרך החשיבה הראשונית. בכיתה ט נוסף עליהם נדבך, שלא רק שאינו מבטל אותם, אלא הוא אף נשען עליהם, הן כידע קודם והן כתשתית לבניית עטיפה פורמאלית ולוגית.
2. בראשית הלימוד יושם דגש על היכרות עם מערכת היסקית, ובפרט על היכולת להתבסס רק על הגדרות ועל עובדות שנכונותן כבר נקבעה. בהמשך תילמד גם הדרך המקובלת לנסח טענה ולכתוב הוכחה. שאר מיומנויות ההיסק תילמדנה במהלך כיתה ט, תוך כדי התקדמות בתוכנית הלימוד.
3. ההיכרות עם מערכת היסקית ולימוד מיומנויות היסק כוללת את:
   א. המושגים 'הגדרה', 'משפט' ו'הוכחה'.
   ב. התשתית הלוגית של המתמטיקה, כמתים כגון: לכל, קיים, גרירה לוגית, תנאי מספיק, תנאי הכרחי ודוגמה נגדית.
   ג. חשיבה היסקית: היכולת להבין הוכחה נתונה, והיכולת להוכיח משפט באופן עצמאי.
   ד. כתיבה פורמאלית: כל טענה מנומקת היטב ולא נעשות טעויות לוגיות.
4. ההיכרות עם מערכת היסקית ולימוד מיומנויות היסק תהיה מלווה בהרחבת עולם התוכן הגאומטרי.
5. תוכנית כיתה ט נשענת על הכרת המושגים שנלמדו בכיתות ז-ח: ישר, קטע, זווית, חוצה זווית, אנך, משולש, משולש ישר זווית, משולש שווה שוקיים, משולש שווה צלעות, חוצה זווית במשולש, תיכון במשולש, גובה במשולש / במצולע, מרחק של נקודה מישר, ישרים מקבילים, זוויות מתחלפות, זוויות מתאימות, מרובע, מלבן, ריבוע, טרפז, מקבילית, מעגל, תיבה, מנסרה משולשת, גליל, צורות חופפות, שטח, היקף, שטח פנים, נפח.
6. להלן רשימה של הנחות יסוד ומשפטים שעליהם, ורק עליהם, אפשר להתבסס בתחילת כיתה ט:
   א. כלל המעבר (טרנזיטיביות): שני עצמים גאומטריים ששווים / חופפים לעצם שלישי שווים / חופפים ביניהם.
   ב. כלל החיבור: שני קטעים (או זוויות), שכל אחד מהם מחולק לשני קטעים זרים, שווים אם הקטעים שמרכיבים אותם שווים בהתאמה.
   ג. בין כל שתי נקודות עובר קו ישר יחיד.

ד. סכום זוויות צמודות הוא 180 מעלות.
ה. זוויות קודקודיות שוות זו לזו.
ו. משפטי החפיפה במשולש: צ.ז.צ , ז.צ.ז, צ.צ.צ וניצב ויתר.
ז. במשולש שווה שוקיים התיכון לבסיס, הגובה לבסיס וחוצה זווית הראש מתלכדים. כמו כן, זוויות הבסיס שוות.
ח. אם שני קווים הם מקבילים, אזי הזוויות המתחלפות שביניהם הן שוות.
ט. סכום הזוויות במשולש הוא 180 מעלות.
י. סכום הזוויות הפנימיות במצולע קמור, בעל n צלעות, הוא $180(n-2)$ מעלות.
יא. זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה, ובפרט גדולה מכל זווית פנימית שאינה צמודה לה.
יב. סכום שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית.
יג. משפט פיתגורס.
יד. שני משולשים שכל זוויותיהם שוות הם דומים.

7. תוכנית הלימודים בגאומטריה מחולקת לתחומי תוכן, שבכל אחד מהם מצוינים דגשים ומטרות משנה. בכל תחום תוכן, מפורטות המיומנויות שאותן יש ללמוד בשלב זה, וכן רשימת המשפטים שאותם צריכים התלמידים להכיר ולדעת להוכיח. סדר הלימוד המוצע של תחומי התוכן השונים אינו מחייב, כל עוד נשמרים המבנה הלוגי וסדר לימוד מיומנויות ההיסק.
8. בכיתה ט ייִמשך העיסוק בחישובים. התשתית שאותה למדו התלמידים בכיתות ז-ח כוללת חישובי זוויות, חישובי שטחים, חישובי נפחים וחישובים המבוססים על משפט פיתגורס.
9. בכיתה ט יעסקו התלמידים בבניות בסרגל ובמחוגה בגישה היסקית.
10. תלמידים עלולים לפקפק בנחיצותה של גישה היסקית, מכיוון שהורגלו מחוץ ללימודים ובמהלכם להשתכנע בנכונותה של טענה בגישה אינדוקטיבית. יש לחזק את הצורך בנחיצותה של הוכחה באמצעות דוגמאות. קיימות כמה תוצאות שאינן מובנות מאליהן (ואף מפתיעות), שגישה דדוקטיבית יכולה לשכנע באמיתותן. התוכנית מציעה חופש החלטה לגבי העיתוי של הוראת תוצאות אלה.

להלן רשימת דוגמאות לתוצאות שאינן מובנות מאליהן:

א. משולש שבו התיכון לצלע שווה למחצית הצלע הוא משולש ישר זווית.
ב. במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחציתו.
ג. כל זווית היקפית הנשענת על קוטר של מעגל היא זווית ישרה.
ד. סכום זוויות חיצוניות בכל מצולע קמור הוא 360 מעלות.
ה. קטע האמצעים במשולש מקביל לצלע ושווה למחציתה.
ו. קטע האמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם.
ז. התיכונים במשולש מחלקים זה את זה ביחס קבוע.

11. הדוגמאות שבתוכנית הגאומטריה מציגות דרכים אפשריות ליישום המיומנויות החדשות הנלמדות בכל פרק. בכל אחד מפרקי התוכן יש ללמד בנוסף גם תרגילים המבססים מיומנויות שנלמדו בפרקים קודמים, גם אם דוגמאות כאלה אינן מובאות באופן מפורש בתוכנית.
12. במידת האפשר, רצוי להציג לתלמידים יותר מדרך הוכחה אחת, ויש לעודד אותם לפתור תרגילים במגוון דרכים.

1. דלתון ומשולש שווה שוקיים (10 שעות)

הדלתון הוא הפלטפורמה שעל גביה יש לתרגל את חפיפת המשולשים ואת הכתיבה המסודרת של הוכחה.

מיומנויות:

- זיהוי של משפט על סמך מושגים שהוגדרו;
- הכרת הַכַּמָּת "כל";
- זיהוי של הנתונים ושל התוצאה המבוקשת;
- הבנה של השתלשלות היסקית קצרה;
- ספקנות לגבי נכונות טענות;
- הנמקה של טענה בודדת;
- זיהוי (קדם היסקי) של משולשים חופפים;
- שימוש במשפטי חפיפה לנימוק החפיפה שזוהתה;
- הסקת שוויון קטעים או זוויות מתוך משפטי החפיפה;
- כתיבה פורמאלית קצרה;
- שימוש במערכת צירים לצורך שרטוט צורות נתונות;
- חישובי שטח והיקף.

הגדרות:

- הדלתון הוא מרובע שלו שני זוגות זרים של צלעות סמוכות השוות זו לזו.
- הקדקוד של הדלתון, שהוא נקודת החיתוך של שתי צלעות (סמוכות) השוות זו לזו, נקרא **קדקוד ראשי**, והזווית בקדקוד זה נקראת **זווית ראש**. הזוויות בשני הקדקודים האחרים נקראות **זוויות צד**.
- האלכסון המחבר שני קדקודים ראשיים בדלתון נקרא **האלכסון הראשי**. האלכסון האחר נקרא **האלכסון המשני**.

דגשים:

1. בהוראת הנושא הראשון יש להניח את התשתית למיומנויות היסודיות של היסק בגאומטריה:
   א. יש לדעת שטענה מתמטית מתייחסת לַכַּמָּת 'כל', גם אם אין הוא מנוסח במפורש.
   ב. יש ללמוד לנסח כל משפט או תרגיל במונחים של: "אם.... אזי ....".
   ג. יש ללמוד לזהות מהם הנתונים ומה צריך להוכיח, בהסתמך על ניסוח המשפט.
   ד. יש להבין את ההשתלשלות ההיסקית של הוכחה נתונה.
   ה. יש לעורר בתלמידים ספקנות, ולהרגילם לבדוק נכונות ורלוונטיות של נימוקים. בפרט, מומלץ לנתח נימוקים שגויים או נימוקים שאינם רלוונטיים.

   ו. יש לזהות בכלים קדם-דדוקטיביים משולשים החופפים זה לזה. יש להבין כיצד לברר האם הנתונים לגבי משולשים אלה תואמים לאחד ממשפטי החפיפה, ויש לדעת להוכיח את החפיפה בגישה דדוקטיבית.
   ז. התלמידים יידרשו לתכנן הוכחה ולנסחה. יש להקפיד שכל טענה משמעותית במהלך הוכחה תהיה מלווה בנימוק.

2. כלים העומדים בפני התלמידים לפיתוח חשיבה היסקית ולבניית הוכחות הם:
   א. סימון על גבי שרטוט;
   ב. קישור לידע קודם;
   ג. חשיבה לפנים מתוך הנתונים, וחשיבה לאחור מתוך הנדרש להוכחה;
   ד. ניסוי וטעייה;
   ה. סיעור מוחות (דיון כיתתי).
3. יש ללמוד לנסח את הנתון במשפט או בתרגיל ואת מה שצריך להוכיח בו בכתיב פורמאלי.
4. יש ללמוד לכתוב מקטעים של הוכחה פורמאלית.
5. לרשות התלמידים עומדים כלי תוכן שאותם רכשו בכיתות ז-ח (ראו סעיף 5 במבוא). מומלץ לחשוף את התלמידים לכלי תוכן אלה בהדרגה, ורק בהתאם לצרכים.
6. בפרקי הלימוד הראשונים, מומלץ שלא לחרוג ממבנים היסקיים פשוטים (עד שני שלבי היסק). בכל מקום שבו הדבר אפשרי, יש להבליט את שרשרת ההיסקים המובילה למסקנה.
7. מיומנויות היסק נוספות נדחות לפרקים הבאים.
8. יש לנצל את הוראת הדלתון כדי לתרגל היסק הנוגע לחפיפת משולשים ולמשולש שווה שוקיים, או לנושאים אחרים שנלמדו בעבר.
9. יש לדעת להסיק שוויון קטעים או שוויון זוויות מתוך משפטי חפיפת משולשים.
10. יש להסיק תוצאות הנובעות מתכונות הדלתון.
11. לצד תרגילים היסקיים, יש לתרגל נושאים חישוביים הקשורים בדלתון ובשיבוצו במערכת צירים.

פירוט התוכן:

1. דלתון קמור מורכב משני משולשים שווי שוקיים בעלי בסיס משותף.
2. במסגרת לימוד על הדלתון, יש לחזור על משפטים העוסקים במשולשים שווי שוקיים:
   א. במשולש שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות זו לזו.
   ב. במשולש שווה שוקיים חוצה זווית הראש, התיכון לבסיס והגובה לבסיס מתלכדים.
3. במסגרת הוראת הדלתון יש ללמוד משפטים שטרם נלמדו בנושא משולשים שווי שוקיים:
   א. משולש שבו שתי זוויות שוות הוא משולש שווה שוקיים.

   ב. משולש שבו חוצה הזווית מתלכד עם הגובה הוא משולש שווה שוקיים.
   ג. משולש שבו התיכון מתלכד עם הגובה הוא משולש שווה שוקיים.
4. יש להדגים בפני התלמידים דלתון קמור ודלתון קעור.
5. האלכסון הראשי של הדלתון הוא ציר סימטרייה.
6. האלכסון הראשי של הדלתון חוצה את זוויות הראש.
7. האלכסון הראשי של הדלתון חוצה את האלכסון המשני.
8. האלכסונים בדלתון מאונכים זה לזה.
9. זוויות הצד בדלתון שוות זו לזו.
10. שטח הדלתון שווה למחצית מכפלת האלכסונים.

2. בניות בסיסיות (12 שעות)

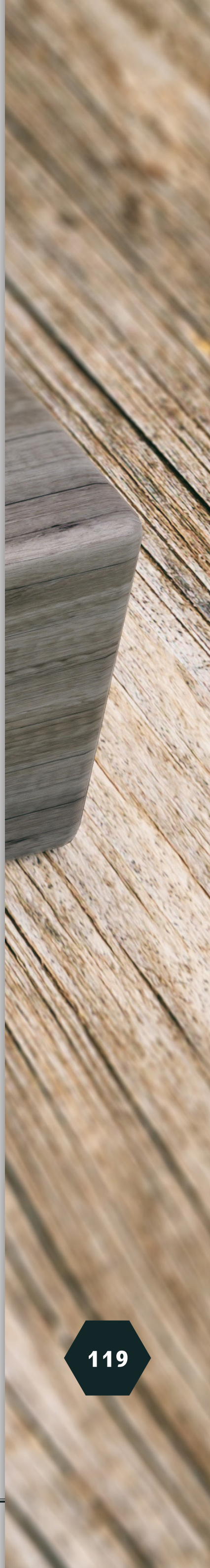
בניות באמצעות סרגל ומחוגה הן תחום תוכן המשתלב הן עם הגישה ההיסקית והן עם תחומי התוכן הנלמדים בכיתה ט. בפרק זה נדרשים התלמידים לתכנן את פעולותיהם כדי לממש בנייה נדרשת. תוך כדי כך הם מחזקים את מיומנויות ההוכחה שאליהן נחשפו בפרק הקודם. הפרק כולל ביסוס של התוכן שנלמד בפרק הקודם ושל פרק חפיפת המשולשים. מעבר לכך, פרק זה משמש מבוא לבניות עזר שתופענה בהוכחות בהמשך. תרגילי הבנייה מבוססים באופן בלעדי על התוכן של פרק הלימוד הקודם. בהמשך הלימוד יש לבסס את הבניות גם ביחס לצורות הגאומטריות ולתכנים החדשים שיילמדו.

מיומנויות:

- הקדמת תכנון לביצוע;
- יכולת הצדקה של כל שלב בביצוע;
- זיהוי מקרים שבהם הנתונים מספיקים לבניית צורה יחידה;
- הטמעת הקשר שבין יחידוּת צורה נבנית לבין חפיפתה לצורה אחרת, שנבנתה לפי אותם נתונים.

דגשים:

1. כל בנייה תהיה מבוססת על תכנון מוקדם, באופן שיספק את דרישות הבנייה על פי הנתונים.
2. כל בנייה תהיה מלווה בהוכחה המצדיקה אותה.
   יוצאות מכלל זה הן הבניות הבאות: העתקת קטע, חיבור קטעים או חיסורם (כולל הכפלת קטע נתון במספר טבעי), העתקת זווית, חיבור זוויות או חיסורן (כולל הכפלת זווית נתונה במספר טבעי).
3. יש להראות כיצד מחסור בדרישות הבנייה עלול לגרור חוסר יחידוּת של הצורה הנבנית.
4. יש להראות כיצד עודף בדרישות הבנייה עלול לשלול את אפשרות הבנייה.
5. יש לדעת לקשר בין דרישות בנייה המגדירות צורה יחידה לבין משפטי החפיפה.



6. היחידוּת של הצורה הנבנית גוררת את חפיפתה לכל צורה אחרת שנבנתה לפי אותן דרישות. עובדה זו היא היבט נוסף של המושג ׳חפיפה׳.
7. הבניות יכולות להיעשות באמצעות סרגל חסר שנתות ומחוגה, או בעזרת אמצעי טכנולוגי המדמה זאת.
8. יש ללמד משפטים שהוכחתם מתבססת על בנייה, כגון: אם במשולש שתי צלעות שאינן שוות, הרי שמול הצלע הגדולה שבהן ממוקמת הזווית הגדולה.

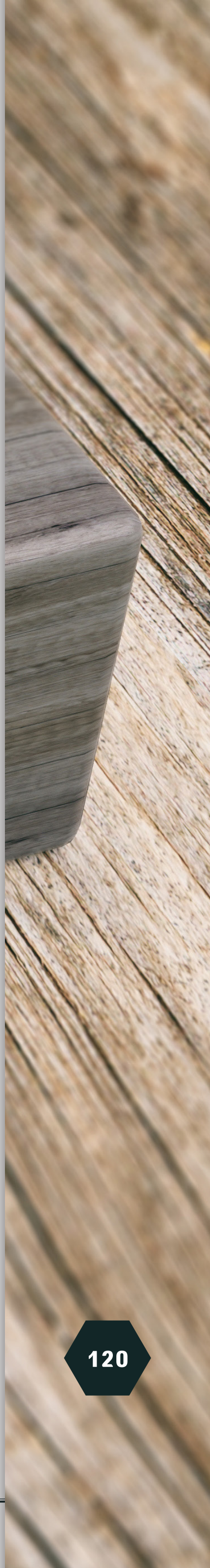
פירוט הבניות הבסיסיות:

1. העתקת קטע;
2. חיבור קטעים או חיסורם (כולל הכפלת קטע נתון במספר טבעי);
3. העתקת זווית;
4. חיבור זוויות או חיסורן (כולל הכפלת זווית נתונה במספר טבעי);
5. חציית קטע;
6. העלאת אנך אמצעי לקטע;
7. הורדת אנך לישר מנקודה שמחוץ לישר;
8. העלאת אנך לישר מנקודה על הישר;
9. חציית זווית;
10. בניית משולש לפי נתונים התואמים את כל אחד ממשפטי החפיפה המוכרים;
11. בניית משולש לפי נתונים התואמים את אחד ממשפטי החפיפה המוכרים ביחס למשולש החלקי לו:
    - א. בנו משולש לפי אורך חוצה זווית, ושתי הזוויות הנוצרות בקצותיו עם צלעות המשולש.
    - ב. בנו משולש לפי אורך צלע, אורך התיכון לאותה צלע ואורך צלע נוספת.
    - ג. בנו משולש לפי אורך צלע, אורך הגובה לאותה צלע ואורך צלע נוספת.
    - ד. בנו משולש שווה שוקיים לפי אורך הבסיס ואורך הגובה לבסיס.

3. ישרים מקבילים וטרפז (8 שעות)

מיומנויות:

- מיומנות היסק בכל הנוגע לקשרים בין הקבלה וזוויות;
- זיהוי (קדם היסקי) של ישרים מקבילים;
- שימוש בקשרים בין הקבלה וזוויות לנימוק ההקבלה שזוהתה (זוג ישרים מקבילים יחיד);
- הסקת שוויון זוויות מתוך הקבלה.



הגדרות:

- **ישרים מקבילים** הם ישרים הנמצאים באותו מישור ואינם נחתכים.
- **טרפז** הוא מרובע שבו יש זוג יחיד של צלעות המקבילות זו לזו.

הצלעות המקבילות נקראות **בסיסים**, והצלעות האחרות נקראות **שוקיים**. המרחק בין שני הבסיסים נקרא **גובה**.

דגשים:

1. יש להמשיך ולהדגיש את כל המיומנויות שהוזכרו בנושא הקודם.
2. אם שני ישרים מקבילים זה לזה, אזי כל שתי זוויות המתחלפות ביניהם שוות זו לזו.

טענה זו, שהוזכרה בכיתה ז, ונראית תואמת את המציאות שבה אנו חיים, איננה ניתנת להוכחה, ואנחנו מקבלים אותה כהנחת יסוד.

3. אם שתי זוויות מתחלפות בין שני ישרים שוות זו לזו, אזי שני הישרים מקבילים זה לזה.

טענה זו ניתנת להוכחה, והוכחתה מבוססת על דרך השלילה. אפשר להוכיחה בשלב זה, אך אפשר לדחות את הוכחתה לשלב מאוחר יותר, שבו תילמד באופן מסודר המיומנות של הוכחה בדרך השלילה.

4. המרחק בין שני ישרים מקבילים הוא קבוע.
5. הקבלה בין ישרים היא תכונה טרנזיטיבית.
6. יש לדעת לבנות ישר המקביל לישר a והעובר דרך נקודה Q שמחוץ לישר a.

דרך א:

- מורידים אנך b מהנקודה Q לישר a.
- מעלים אנך c לישר b מהנקודה Q.
- לישרים a, c יש אנך משותף, ולכן הם מקבילים.

דרך ב:

- מחברים את הנקודה Q עם נקודה P כלשהי הממוקמת על הישר a.
- מעתיקים את הזווית שבין הישר a לבין הקטע PQ על הקטע PQ בקדקוד Q כך ששתי הזוויות תתחלפנה.
- שוק הזווית החדשה והישר a מקבילים זה לזה.

7. בהוראת הטרפז יש לבסס את התשתית למיומנויות היסודיות של היסק בנושא ישרים מקבילים:

א. יש לזהות ישרים מקבילים על סמך שתי זוויות מתחלפות השוות זו לזו, על סמך שתי זוויות מתאימות השוות זו לזו, או על סמך שתי זוויות חד-צדדיות שסכומן 180° (אין חובה ללמד את המושג 'זוויות חד צדדיות'). יש לדעת לנמק את הסיבה להקבלה.

ב. מכך ששני ישרים מקבילים זה לזה, יש לזהות שכל שתי זוויות מתחלפות שוות זו לזו, שכל שתי זוויות מתאימות שוות זו לזו, או שסכום כל שתי זוויות חד-צדדיות הוא 180°, ויש לדעת לנמק זאת בהתאם.

8. יש לנצל את הוראת הטרפז כדי לתרגל היסק בנושא זוג יחיד של ישרים מקבילים, זאת לפני העיסוק בשני זוגות של ישרים מקבילים, שיבוא לידי ביטוי בפרק המקבילית.
9. יש להסתמך על הידע בבניות כדי להשתמש בבניות עזר בהוכחת משפטים.
10. במקרים שבהם הדבר אפשרי, יש להדגים דרכים שונות להוכיח אותו משפט.
11. במידת האפשר, מומלץ להציג בפני התלמידים יותר מדרך אחת לכתיבת הוכחה.

פירוט התוכן:

1. כדי להראות שמרובע כלשהו הוא טרפז, יש להראות ששתי צלעות נגדיות מקבילות זו לזו, וששתי הצלעות הנוספות אינן מקבילות זו לזו.
2. בטרפז שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות זו לזו. משפט זה ניתן להוכחה במגוון דרכים, ובאמצעות בניות עזר שונות (הורדת אנכים לבסיס הארוך משני קצות הבסיס הקצר, העברת מקביל לשוק דרך אחד מקדקודי השוק האחרת[2], או הארכת שוקי הטרפז עד חיתוכן[3]).
3. טרפז שבו זוויות הבסיס שוות זו לזו הוא טרפז שווה שוקיים. גם משפט זה ניתן להוכחה במגוון דרכים ובאמצעות בניות עזר שונות.
4. בטרפז שווה שוקיים האלכסונים שווים זה לזה.
5. האנך האמצעי לבסיסים בטרפז שווה שוקיים הוא ציר סימטרייה.
6. יש לדעת לחשב היקף ושטח של טרפז.

4. מקבילית ותכנים נוספים שאפשר להוכיח באמצעות תכונותיה (10 שעות)

מיומנויות:

- הבנת הוכחות רב-שלביות שבהן מובלטת שרשרת ההיסקים;
- הכרה בעובדה שיש יותר מדרך נכונה אחת להוכיח טענה;
- אבחנה בין משפט למשפט הפוך.

הגדרה:

המקבילית היא מרובע שבו יש שני זוגות של צלעות המקבילות זו לזו.

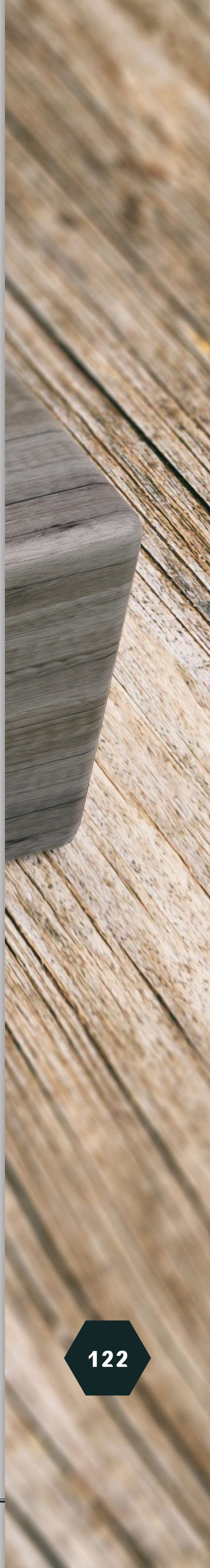
דגשים:

1. יש להמשיך ולהדגיש את כל המיומנויות שהוזכרו בנושאים הקודמים.
2. בכל ההנמקות הנוגעות לזוויות בין קטעים מקבילים, יש לציין מהו זוג הקטעים המקבילים שבו מדובר.

---

[2] גישה זו להוכחת המשפט תילמד רק לאחר לימוד המקבילית.

[3] ההוכחה האחרונה מתבססת על ידע בדמיון שאותו למדו התלמידים בגישה קדם-דדוקטיבית בכיתה ח. אין להסתמך על הדמיון באופן בלעדי להוכחת המשפט, כיוון שהנושא עדיין לא נלמד במסגרת דדוקטיבית.



3. יש להכיר את תכונות המקבילית הנובעות מהגדרתה. יש להבליט את שרשרת ההיסקים המובילה מהגדרת המקבילית לתכונה המבוקשת.
4. יש להכיר דרכים לזיהוי מקבילית מכלל המרובעים. יש להבליט את שרשרת ההיסקים המובילה מהנתונים, המגלמים קריטריון לזיהוי מקבילית, לתנאי ההגדרה שלה, במשפט מהצורה: "מרובע שבו..... הוא מקבילית".
5. יש לדעת להבדיל בין משפט ובין משפט הפוך באמצעות החלפה בין הנתון ובין מה שצריך להוכיח.
6. יש לדעת להבדיל בין ההוכחה של משפט וההוכחה של המשפט ההפוך לו באמצעות היפוך הכיוון של שרשרת ההיסקים (ובכלל זה: הנתון ומה שצריך להוכיח).
7. יש להכיר שנכונות משפט אינה מחייבת את נכונות המשפט ההפוך לו.
8. עד כה התבססו ההוכחות על מהלך היסקי בן שלב אחד או שניים. כעת, אם ההוכחה היא מרובת שלבים יש לקיים דיון כיתתי על המהלך ההיסקי של ההוכחה, ולהבליט את שרשרת ההיסקים העומדת בבסיסה.
9. במידת האפשר, רצוי להציג לתלמידים יותר ממהלך היסקי אחד להוכחה.

פירוט התוכן:

1. יש לדעת כיצד בונים מקבילית על סמך שתי צלעות סמוכות והזווית החדה שביניהן, או על סמך שתי צלעות סמוכות ואלכסון המקבילית.
2. יש להכיר את תכונות המקבילית ולדעת כיצד הן נובעות מהגדרתה:
   א. האלכסון מחלק את המקבילית לשני משולשים חופפים.
   ב. צלעות נגדיות שוות זו לזו.
   ג. זוויות נגדיות שוות זו לזו.
   ד. סכום זוויות סמוכות הוא 180°.
   ה. חוצי זוויות סמוכות מאונכים זה לזה.
   ו. האלכסונים חוצים זה את זה.
3. יש להכיר את הסימטרייה הסיבובית של המקבילית סביב נקודת מפגש האלכסונים.
4. יש להכיר תוצאות הנובעות מתכונות המקבילית:
   א. בטרפז שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות זו לזו.
   ב. טרפז שבו זוויות הבסיס שוות זו לזו הוא טרפז שווה שוקיים.
   ג. טרפז שבו האלכסונים שווים זה לזה הוא טרפז שווה שוקיים.
5. יש להכיר תכונות מזהות של מקבילית ולדעת כיצד כל תכונה גוררת את תנאי ההגדרה:
   א. אם הסכום של כל שתי זוויות סמוכות במרובע הוא 180°, אזי המרובע הוא מקבילית.
   ב. אם במרובע כל שתי זוויות נגדיות שוות זו לזו, אזי המרובע הוא מקבילית.
   ג. מרובע שבו האלכסונים חוצים זה את זה הוא מקבילית.

    ד. מרובע שבו הצלעות הנגדיות שוות זו לזו הוא מקבילית.
    ה. מרובע שבו שתי צלעות נגדיות שוות ומקבילות הוא מקבילית.
6. יש להכיר את התכונות של קטע האמצעים במשולש ובטרפז, ולהבין כיצד הן נובעות מתכונות המקבילית.
    א. קטע האמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.
    ב. קטע האמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם.
    ג. קטע היוצא מאמצע צלע של משולש ומקביל לצלע אחרת - חוצה את הצלע השלישית.
    ד. קטע היוצא מאמצע שוק של טרפז ומקביל לבסיסיו - חוצה גם את השוק האחרת.

5. מלבן ותכנים נוספים שאפשר להוכיח באמצעות תכונותיו (8 שעות)

מיומנויות:

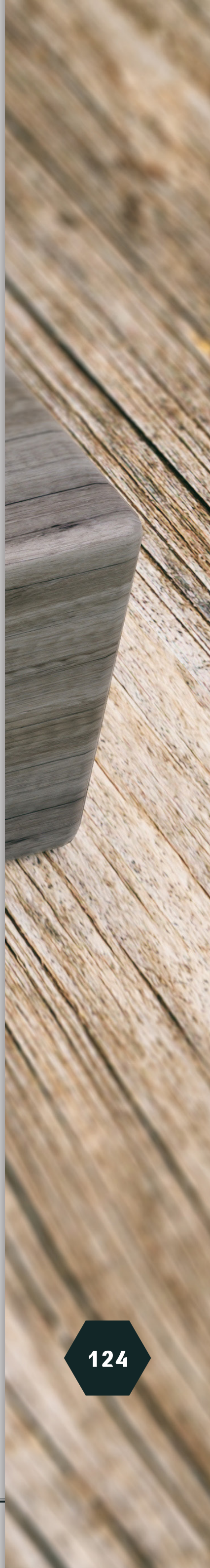
- אבחנה בין סוגים שונים של נכונות;
- הפרכת טענה מתמטית.

הגדרה:

מלבן הוא מרובע שבו כל הזוויות ישרות.

דגשים:

1. יש להמשיך ולהדגיש את כל המיומנויות שהוזכרו בנושאים הקודמים.
2. יש ללמוד להבחין בין שלושה סוגים של טענות:
    א. טענה שהיא נכונה בכל מקרה.
    ב. טענה שאיננה נכונה בכל מקרה (למשל: האלכסונים במלבן מחלקים זה את זה ביחס של 2:1).
    ג. טענה שאיננה נכונה בכל מקרה, אבל ייתכנו מקרים פרטיים שבהם היא נכונה (למשל: צלעות סמוכות במלבן שונות זו מזו).
3. יש לדעת שמשפט במתמטיקה נחשב נכון רק אם הוא מתקיים בכל מקרה. משפט במתמטיקה נחשב לא נכון גם אם קיימים מקרים פרטיים שבהם הוא מתקיים (למשל: צלעות סמוכות במלבן שונות זו מזו).
4. יש להסיק מסעיף 3 שדי בדוגמה נגדית אחת כדי להפריך טענה מתמטית.
5. יש להכיר את תכונות המלבן הנובעות מהגדרתו. יש להבליט את שרשרת ההיסקים המובילה מהגדרת המלבן לתכונה המבוקשת.
6. יש להכיר דרכים לזיהוי מלבן מכלל המרובעים, ומכלל המקביליות. יש להבליט את שרשרת ההיסקים המובילה מהנתונים, המגלמים קריטריון לזיהוי מלבן, לתנאי ההגדרה שלו, במשפט מהצורה: "מרובע שבו..... הוא מלבן" או: "מקבילית שבה..... היא מלבן".
7. יש לאפשר לתלמידים לחקור בעצמם תופעות גאומטריות, לשער השערות (אפשר בכלים טכנולוגיים) ולהוכיחן.



פירוט התוכן:

1. יש לדעת לבנות מלבן בהינתן שתי צלעות סמוכות, או בהינתן צלע ואלכסון.
2. יש להכיר את תכונות המלבן ולדעת כיצד הן נובעות מהגדרתו:
   א. מלבן הוא מקבילית, ולכן כל תכונות המקבילית מתקיימות בו.
   ב. האלכסונים במלבן שווים זה לזה.
3. יש להכיר את הסימטרייה הסיבובית של המלבן סביב נקודת מפגש האלכסונים, ואת שני צירי הסימטרייה שלו.
4. יש להכיר תכונות מזהות של מלבן ולדעת כיצד כל תכונה גוררת את תנאי ההגדרה:
   א. מקבילית שבה יש זווית ישרה היא מלבן.
   ב. מקבילית שבה האלכסונים שווים זה לזה היא מלבן.
   ג. להראות שמרובע כלשהו הוא מלבן אפשר לפעול באחת משלוש הדרכים הבאות:
      i. להראות שיש שלוש זוויות ישרות.
      ii. להראות שהוא מקבילית שבה יש זווית ישרה.
      iii. להראות שהוא מקבילית שבה האלכסונים שווים זה לזה.
5. יש להכיר תוצאות הנובעות מתכונות המלבן ומהדרכים לזיהויו:
   א. במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר.
   ב. בהזדמנות זו יכול להילמד גם המשפט ההפוך, אף שהוכחתו איננה מבוססת בהכרח על פרק המלבן, אלא על משולשים שווי שוקיים. כאן אפשר להוכיחו גם בהסתמך על הדרכים לזיהוי מלבן: משולש שבו התיכון שווה למחצית הצלע שאותה הוא מחלק, הוא משולש ישר זווית.

6. הוכחה על דרך השלילה (4 שעות)

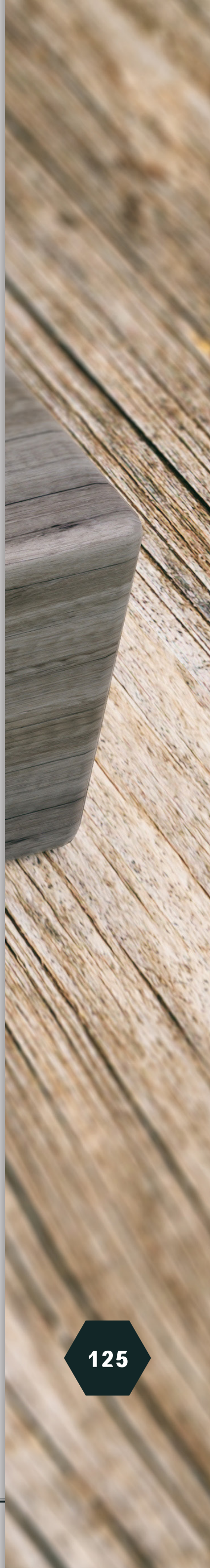
פרק זה עוסק במיומנות ההוכחה על דרך השלילה, במגוון תכנים גאומטריים שבהם המיומנות נדרשת.

מיומנויות:

- הוכחה על דרך השלילה;
- חלוקה דיכוטומית של מלוא האפשרויות;
- בירור טענה היפותטית.

דגשים:

1. הוכחות על דרך השלילה שימושיות בגאומטריה ובתחומים מתמטיים אחרים.
2. הוכחה על דרך השלילה מורכבת מסדרה של שלבים כדלקמן:



א. חלוקה דיכוטומית של מלוא האפשרויות: תוצאה 1 או תוצאה 2.
ב. בירור של השאלה: "מה היה קורה אילו...[הייתה מתקיימת תוצאה 2]?".
ג. תוך כדי הבירור, מתבהרת תוצאה הכרחית שעומדת בסתירה לנתון או לעובדה ידועה.
ד. הסתירה שהתבהרה שוללת את האפשרות של תוצאה 2.
ה. משלילת תוצאה 2 נותרת אפשרות יחידה והיא: קיומה של תוצאה 1.

3. יש להדגים את עקרון ההוכחה בכמה דוגמאות פשוטות (שבהן שלב הבירור הוא קצר), ושאותן ניתן לבחור מבין הדוגמאות 1 - 5 להלן. לאחר מכן, יש לעבור להוכחות מורכבות (שבהן שלב הבירור מורכב יותר) של משפטים שאת תוכנם הגאומטרי יש להכיר.

פירוט המשפטים שלהוכחתם ניתן להשתמש בהוכחה בדרך השלילה:

1. מנקודה על ישר אפשר להעלות אנך אחד בלבד.
2. מנקודה מחוץ לישר אפשר להוריד ישר אחד בלבד המאונך לישר הנתון.
3. כל שני גבהים במשולש נחתכים.
4. כל שני חוצי זווית במשולש נחתכים.
5. כל שני אנכים אמצעיים במשולש נחתכים.
6. אם שתי זוויות מתחלפות בין שני ישרים שוות זו לזו, אזי זוג הישרים מקבילים זה לזה.
7. משפט החפיפה הרביעי: אם שתי צלעות במשולש אחד שוות לשתי צלעות במשולש אחר, ואם הזווית שמול הצלע הגדולה (בין השתיים) במשולש האחד שווה לזווית המתאימה לה במשולש האחר, אזי שני המשולשים חופפים זה לזה.
8. אם במשולש יש שתי זוויות שונות זו מזו, הרי שמול הזווית הגדולה ממוקמת הצלע הגדולה.
9. קטע המחבר שתי צלעות במשולש, מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה, הוא קטע אמצעים.
10. קטע המחבר שתי שוקיים בטרפז, מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם, הוא קטע אמצעים.

7. מעוין וריבוע (8 שעות)

מיומנויות:

- הבלטת שרשרת היסקים;
- הכרת היחסים ההדדיים בין קבוצות מרובעים;
- אוריינות גאומטרית.

הגדרות:

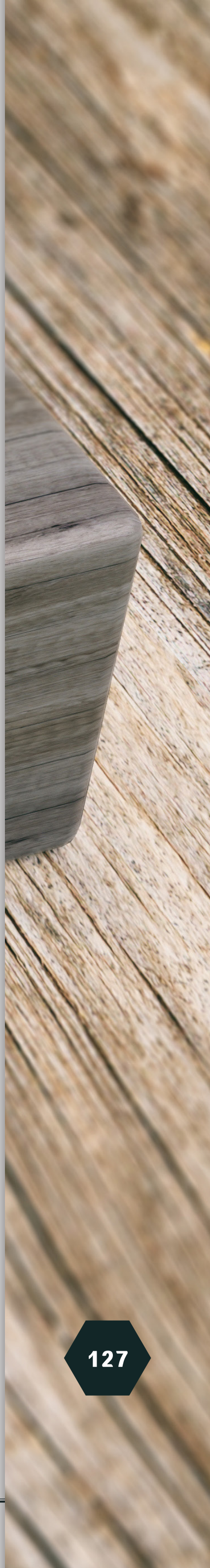
- המעוין הוא מרובע שבו כל הצלעות שוות.
- ריבוע הוא מרובע שבו כל הצלעות שוות וכל הזוויות ישרות.

דגשים:

1. יש להמשיך ולהדגיש את כל המיומנויות שהוזכרו בנושאים הקודמים.
2. יש להכיר את תכונות המעוין ואת תכונות הריבוע הנובעות מהגדרותיהם. יש להבליט את שרשרת היסקים המובילה מההגדרות לתכונות המבוקשות.
3. יש להכיר דרכים לזיהוי מעוין מכלל המרובעים, מכלל הדלתונים ומכלל המקביליות. יש להבליט את שרשרת ההיסקים המובילה מהנתונים, המגלמים קריטריון לזיהוי מעוין, לתנאי ההגדרה שלו במשפט מהצורה: ״מרובע שבו..... הוא מעוין״, או: ״דלתון שבו..... הוא מעוין״, או: ״מקבילית שבה..... היא מעוין״.
4. יש להכיר דרכים לזיהוי ריבוע מכלל המרובעים, מכלל המקביליות, מכלל המלבנים ומכלל המעוינים. יש להבליט את שרשרת ההיסקים המובילה מהנתונים, המגלמים קריטריון לזיהוי ריבוע, לתנאי ההגדרה שלו.
5. יש להכיר את היחסים ההדדיים הקיימים בין קבוצות שונות של מרובעים, ובכללן קשרי הכלה, קשרי זרות, וקשרי חפיפה חלקית.
6. בפרק ההוראה האחרון יש לחזק את האוריינות הגאומטרית של התלמידים. ׳אוריינות גאומטרית׳ היא היכולת לקרוא תיאור של מבנה גאומטרי ולשרטטו כראוי על סמך הבנת הנקרא. הכנת השרטוט על ידי התלמיד עצמו תבטא את יכולתו לקרוא בדקדקנות ראויה את מלוא הפרטים המופיעים בתיאור מבלי להסתמך על מראה עיניים.

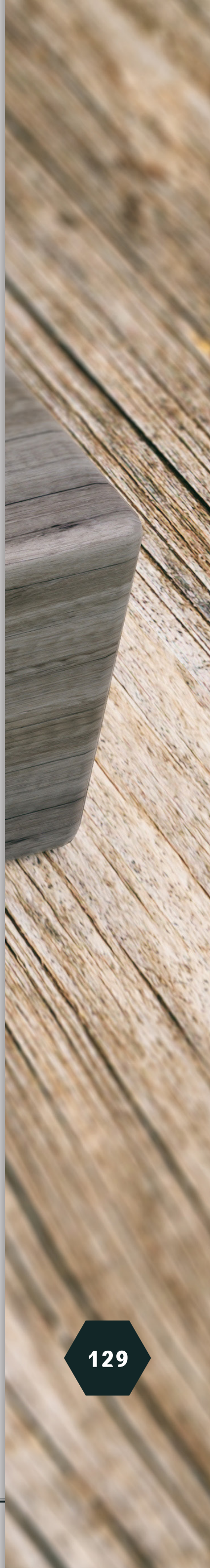
פירוט התוכן:

1. יש לדעת לבנות ריבוע בהינתן צלע.
2. יש לדעת לבנות מעוין בהינתן צלע וזווית בין צלעות.
3. יש להכיר את תכונות המעוין ולדעת כיצד הן נובעות מהגדרתו:
   א. מעוין הוא מקבילית, ולכן כל תכונות המקבילית מתקיימות בו.
   ב. האלכסונים במעוין מאונכים זה לזה.
   ג. האלכסונים במעוין חוצים את הזוויות.
4. יש להכיר את תכונות הריבוע ולדעת כיצד הן נובעות מהגדרתו:
   א. ריבוע הוא מקבילית, ולכן כל תכונות המקבילית מתקיימות בו.
   ב. ריבוע הוא מלבן, ולכן כל תכונות המלבן מתקיימות בו.
   ג. ריבוע הוא מעוין, ולכן כל תכונות המעוין מתקיימות בו.
5. יש להכיר את הסימטריות הסיבוביות של המעוין ושל הריבוע סביב נקודת מפגש האלכסונים, ואת כל צירי הסימטרייה שלהם.
6. יש להכיר תכונות מזהות של מעוין ולדעת כיצד כל תכונה גוררת את תנאי ההגדרה:



   - א. מקבילית שבה שתי צלעות סמוכות שוות היא מעוין.
   - ב. מקבילית שבה האלכסונים מאונכים זה לזה היא מעוין.
   - ג. מקבילית שבה אלכסון חוצה את זווית המקבילית היא מעוין.

7. כדי להראות שמרובע כלשהו הוא מעוין, אפשר לפעול באחת משלוש הדרכים הבאות:
   - א. להראות שארבע צלעותיו שוות.
   - ב. להראות שהמרובע הוא מקבילית שבה שתי צלעות סמוכות שוות.
   - ג. להראות שהמרובע הוא מקבילית שבה האלכסונים מאונכים זה לזה.
   - ד. להראות שהמרובע הוא מקבילית שבה האלכסון חוצה את זווית המקבילית.
8. יש להכיר תכונות מזהות של ריבוע ולדעת כיצד כל תכונה גוררת את תנאי ההגדרה. כדי להראות שמרובע כלשהו הוא ריבוע אפשר לפעול באחת משתי הדרכים הבאות:
   - א. להראות שבמרובע כל הצלעות שוות וכל הזוויות שוות.
   - ב. להראות שהמרובע הוא הן מלבן והן מעוין.
9. יש להכיר תוצאות הנובעות מתכונות המעוין והריבוע ומהדרכים לזיהוים.



נספח - דוגמאות לתוכנית הלימודים לכיתה ט

מבוא לנספח:

מטרת הנספח היא להדגים את הנושאים והדגשים המופיעים בתוכנית הלימודים. הדוגמאות נועדו להציג דרכים לממש את רוח התוכנית, לשלב בין נושאים ולהציע מגוון של דרגות מורכבות וקושי. הדוגמאות בנספח אינן מחייבות, ובוודאי שאינן מתיימרות למצות את שלל התרגילים שיופיעו בספרי הלימוד.

1. חזקות ושורשים (20 שעות)

א. חזקות עם מעריך טבעי

1. א. היעזרו בכתיב חזקות כדי לכתוב ביטויים חשבוניים השווים למספרים הבאים:

   81 $12,100$ $25\cdot64$ $196\cdot169$ 0.25 1.44 0.169

   מצאו יותר מדרך כתיבה אחת.

   ב. כתבו בדרכים שונות את הביטויים: a^5, ו- $4a^2b^3$ באמצעות חזקות.

2. פי כמה גדול 7^{42} מ- 7^{41}?

   פי כמה גדולים $ab+1, ab+2, ab+3$ מ- ab $(a>1)$?

3. לפניכם סדרת מספרים עם חוקיות כפלית: 3, 6, 12, 24.......

   א. מהי החוקיות הקושרת בין שני איברים עוקבים בסדרה?

   ב. מהו האיבר החמישי בסדרה?

   ג. הציגו את האיבר העשירי כמכפלה של חזקות של גורמים ראשוניים.

   ד. כתבו ביטוי אלגברי המבטא את ערכו של האיבר הנמצא במקום ה- n.

4. א. כתבו טבלאות ערכים לפונקציות הבאות (עבור x טבעי):

   $f(x) = x+2$, $g(x) = x\cdot2$, $m(x) = x^2$, $p(x) = 2^x$.

   ב. שרטטו את הגרפים של ארבע הפונקציות (גרף נקודות עבור x טבעי).

5. איזה מהמספרים הבאים שווה ל- 210?

   א. $2^5\cdot2^2$ ב. $2^3\cdot2^7$ ג. $(2^5)^2$

   ד. $2^{20}:2^2$ ה. $(\frac{10}{5})^2$ ו. $(2^5)^5$ ז. $(-2)^{10}$

6. א. מה הערך של n במשוואה $4^{20}+4^{20}=2^n$

   ב. הציעו אפשרויות שונות לערכים של m ו- k (מספרים טבעיים) במשוואה $2^m\cdot2^k = 1,024$

7. קבעו בכל אחד מהסעיפים הבאים איזה ביטוי גדול יותר? הסבירו את תשובתכם.

א. 3^4 או 4^3

ב. 3^{400} או 4^{300}

ג. 10^{20} או $10^{18} \cdot 97$

ד. a^k או b^k (k טבעי, $a > b$, $a, b > 0$)

8. א. האם ייתכן ש-$a^5 = a^6$? נמקו.

ב. האם ייתכן ש-$a^5 > a^6$? נמקו.

9. המילים קילו, מגה, ג׳יגה וטרה מייצגות מספרים.

כתבו מספרים אלה באמצעות חזקות.

10. סדרו את המספרים הבאים בסדר עולה:

$10^{15}\cdot5$ $\quad$ $10^{13}\cdot50$ $\quad$ $10^{10}\cdot500$ $\quad$ $10^{10}\cdot5000$

8. הראו כי $3^{100}+3^{101}+3^{102}=3^{100}\cdot13$

9. סדרו את המספרים הבאים בסדר עולה (היעזרו בחוקי חזקות):

2^{100} , 3^{75}, 5^{50}

10. כיצד מספר הספרות בייצוג עשרוני של מספר קשור למעריך של 10 בייצוג המדעי שלו?

11. השתמשו בכתיב מדעי כדי לבטא את הגדלים הבאים:

- מהירות האור בחלל (שהיא בקירוב 300,000,000 מטר לשניה).
- מספר השניות בשנה (365.25 ימים)
- מספר הקילומטרים שיעבור האור בחלל בשנה אחת.

12. א. השלימו את ריבוע הקסם כך שתתקבל אותה **מכפלה** בכל שורה, בכל טור ובשני האלכסונים הראשיים.

ב. תארו בעזרת חזקות את הקשר בין מכפלת הביטויים האלגבריים בכל שורה, טור או אלכסון ראשי ובין הביטוי האלגברי הממוקם במשבצת האמצעית.

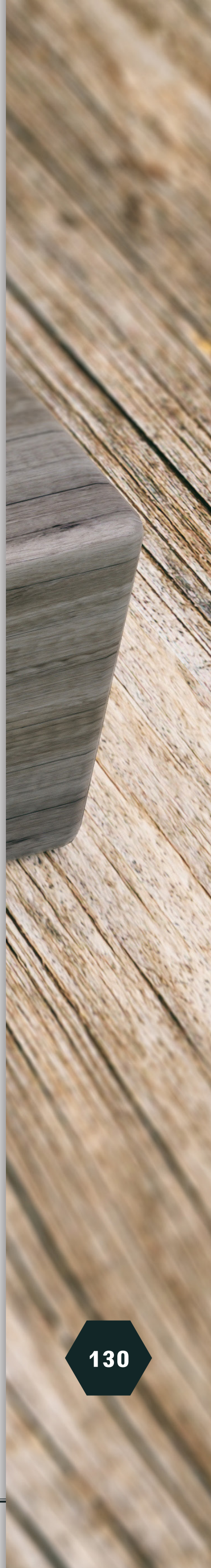
$\left(\frac{a}{2}\right)^2$		
$(2a)^3$	$(2a)^2$	2a

13.א. מצאו דוגמאות שונות שבהן מתקיים $(a + b)n = an + bn$

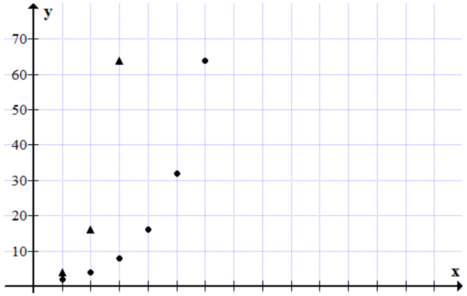
ב. האם נכון תמיד ש-$(a + b)n = an + bn$? נמקו.

14. נתון: $-1<T<0<P<1$

איזה מהביטויים הבאים הוא הקטן ביותר? א. 0 $\quad$ ב. $P \cdot T$ $\quad$ ג. $P^2 \cdot T^2$ $\quad$ ד. $P^3 \cdot T^3$



15. לפניכם הגרפים של הפונקציות $y = 2^n$ ו- $y = 4^n$ (n מספר טבעי).



א. סמנו באדום את גרף הפונקציה $y = 2^n$ ובכחול את גרף הפונקציה $y = 4^n$.

ב. השלימו טבלת ערכים לשני הגרפים:

6	5	4	3	2	1	n
						$y = 2^n$
						$y = 4^n$

ג. הסבירו מדוע אורכו של הקטע המקביל לציר y ומחבר בין שתי נקודות של שני הגרפים הוא $2^n \cdot (2^n - 1)$

ד. שרטטו על מערכת הצירים את גרף הפונקציה $y = 3^n$ עבור אותם ערכים של n.

ב. הרחבת המושג 'חזקה' למעריכים שהם אפס או מספרים שליליים שלמים

$a^0 = 1$ $(a \neq 0)$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $(a \neq 0)$

1. כתבו את המספרים הבאים בייצוגים של שבר פשוט ומספר עשרוני:

$10^{-1}, 10^{-3}, 10^{-9}, (0.01)^{-1}$

2. מהו ערך הביטוי $(548^{-1})^{-1}$? הצדיקו תשובתכם בשתי דרכים שונות.

3. עבור איזה ערך של x הביטוי $(x - 5)^{-3}$ אינו מוגדר?

4. הציבו את הסימנים >, < או = :

א. 2^{-5} ____ $(-2)^5$

ב. $(-3)^3$ ____ $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$

ג. 2^{-5} ____ 2^{-3} האם אפשר לפתור את השאלה מבלי לחשב את הביטויים המספריים?

5. חשבו את ערך הביטוי: $\frac{1}{(x-5)^{-2}}$ עבור: $x = 6 , 7 , 5.5 , -1$

6. מצאו את כל פתרונות המשוואה (הניחו כי הביטוי במעריך הוא מספר טבעי): $(2x + 1)^{2x-1} = 1$

7. נמקו מדוע $(a^{-n})^k$ שווה a^{-nk} עבור n, k טבעיים.

8. האם ייתכן ש a–6 = a–5? הסבירו.

9. השתמשו בכתיב מדעי כדי לבטא את הגדלים הבאים:
   - סנטימטר מעוקב הוא $\frac{1}{1,000,000}$ של מטר מעוקב.
   - פיזיקאיים מתארים אטום בגביש כקובייה שאורך צלעותיה כ- 7-10 מ"מ.
     כמה קוביות כאלה יידרשו כדי למלא 1 סמ"ק?

10. המילים סנטי, מילי, מיקרו, ננו ופיקו מייצגות מספרים.
    כתבו מספרים אלה באמצעות חזקות.

11. השלימו את המכנה באגף שמאל: $\frac{2a^3b^5}{\_\_\_\_} = \frac{1}{2}a$

12. פשטו את הביטוי $\left(\frac{x^4 \cdot x^2 \cdot x^{-5}}{b^5 \cdot b^2 \cdot b^{-4}}\right)^3$, וחשבו את ערכו עבור: $x = 8, b = 4$

13. בבריכה גדל צמח שצף על פני המים. בכל שעה הצמח מכפיל את שטחו (השטח של הצמח בתום כלשעה הוא פי 2 מאשר בתחילתה). כעבור 30 שעות מתחילת גדילתו הצמח כיסה את פני כל הבריכה.
    כמה שעות מתחילת גדילתו כיסה הצמח את מחצית שטח הבריכה?

14. איזה מהביטויים הבאים הוא הקטן ביותר? איזה הוא הגדול ביותר?
    א. $\left(\frac{1}{8}\right)^2$ ב. 3−2   ג. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$ ד. $\frac{1}{4}$

ג. שורשים ריבועיים

1. מצאו לאילו מהביטויים הבאים שווה הביטוי $\sqrt{72}$ מבלי להיעזר במחשבון:
   א. $2\sqrt{6}$ ב. $2\sqrt{18}$ ג. $6\sqrt{2}$ ד. $7\sqrt{2}$

2. חשבו בעזרת מחשבון של הערך של $\sqrt{2}$. חשבו בעזרת מחשבון: $(1.4142)^2$. השוו בין שתי התוצאות והסבירו את ההבדל.

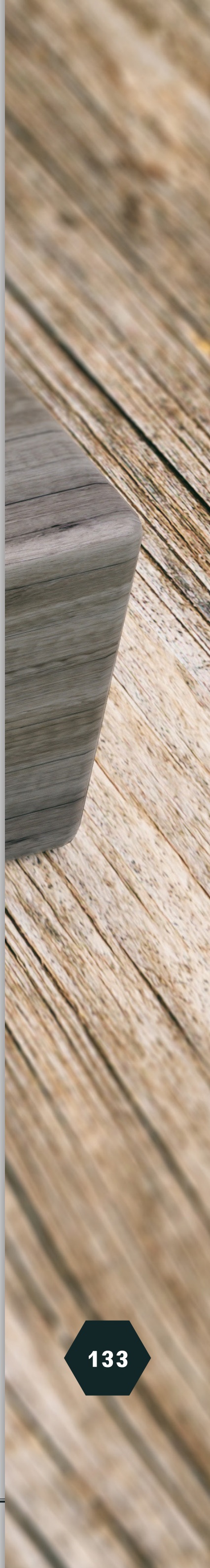
3. חשבו את ערך הביטוי $(\sqrt{2})^{10}$.

4. הציבו סימן >, < או = מבלי להיעזר במחשבון
   א. $2\sqrt{3} \_\_\_ \sqrt{11}$ ב. $5\sqrt{3} \_\_\_\_ \sqrt{75}$

5. הראו כי $\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}=\sqrt{18}$ מבלי להיעזר במחשבון.

6. הראו כי $\sqrt{2\frac{2}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$. מצאו מספרים אחרים שעבורם מתקיים שוויון דומה.

7. שרטטו משולש ישר זווית שאורך הניצבים בו הם 1 יח' אורך ו-2 יח' אורך. העתיקו את היתר על ציר המספרים ואימדו ברמת דיוק של עשירית יח' אורך את האורך.
   חשבו במדויק את אורך היתר בעזרת משפט פיתגורס.



2. הסתברות (15 שעות)

א. הסתברות מותנית

1. ההסתברות שירד גשם בירושלים ביום אקראי בשנה היא 0.12.
   כיצד משתנה הסתברות זו (האם היא גדלה או קטנה?) אם ידוע:
   - א. שבאותו היום הטמפרטורה המרבית היתה 10 מעלות.
   - ב. שבאותו היום הטמפרטורה המרבית היתה 30 מעלות.
   - ג. שאותו היום היה יום ד׳ בשבוע.
2. הטילו מטבע הוגן שלוש פעמים. מהי ההסתברות שבהטלה השלישית התקבלה ׳תמונה׳? כיצד משתנה הסתברות זו, אם ידוע שבשתי ההטלות הראשונות התקבל ׳מספר׳. יש לפתור שאלה זו בשתי דרכים שונות:
   - א. לערוך רשימה של 8 התוצאות שיכולות להתקבל בהטלת מטבע 3 פעמים, לזהות מתוכן את כל התוצאות שבהן בשתי ההטלות הראשונות התקבל ׳מספר׳, ועל פיהן לקבוע מהי ההסתברות לקבלת ׳תמונה׳ בהטלה השלישית.
   - ב. להסתמך על חוסר הרלבנטיות של התוצאות בשתי ההטלות הראשונות לתוצאת ההטלה השלישית, כדי להסיק שידיעת תוצאות אלה של ההטלות הראשונות אינה משנה את ההסתברות של ההטלה השלישית.
3. מטילים שתי קוביות הוגנות, אחת כחולה ואחרת אדומה.
   - א. מה ההסתברות שהסכום שהתקבל הוא 4?
   - ב. מה ההסתברות שהסכום שהתקבל הוא 4, אם ידוע שבקובייה הכחולה התקבלה התוצאה 6?
   - ג מה ההסתברות שהסכום שהתקבל הוא 4, אם ידוע שבקובייה הכחולה התקבלה התוצאה 3?
   - ד. מה ההסתברות שבקובייה הכחולה התקבלה התוצאה 3, אם ידוע שהסכום שהתקבל הוא 4?
   - ה. האם הידיעה שהסכום שהתקבל הוא 4 משפיעה על ההסתברות שאנחנו מייחסים לכך שבקובייה הכחולה התקבלה התוצאה 3? (השוו בין התוצאה של סעיף ד ובין ההסתברות שבקובייה הכחולה התקבלה התוצאה 3, אם לא ידוע מהו הסכום שהתקבל).

ב. הסתברות של שני מאורעות

1. קשת בענן מופיעה רק אם יורד גשם, ובנוסף קרני השמש מפציעות מבעד לעננים. מה יותר סביר: שירד גשם או שתופיע קשת בענן?
2. בשכבת כיתה ט 100 תלמידים. $\frac{1}{5}$ מתלמידי השכבה מצטיינים באנגלית. 0.3 מתלמידי השכבה מצטיינים במתמטיקה. 60% מבין התלמידים המצטיינים במתמטיקה מצטיינים גם באנגלית.
   - א. מהי השכיחות היחסית של התלמידים שמצטיינים הן במתמטיקה והן באנגלית?
   - ב. אם נבחר תלמיד מהשכבה באופן אקראי:
     - I. מהי ההסתברות שהתלמיד מצטיין במתמטיקה?

II. מהי ההסתברות שהתלמיד מצטיין באנגלית?
III. מהי ההסתברות שהתלמיד מצטיין באנגלית אם ידוע שהוא מצטיין במתמטיקה?
IV. מהי ההסתברות שהתלמיד מצטיין הן באנגלית והן במתמטיקה?

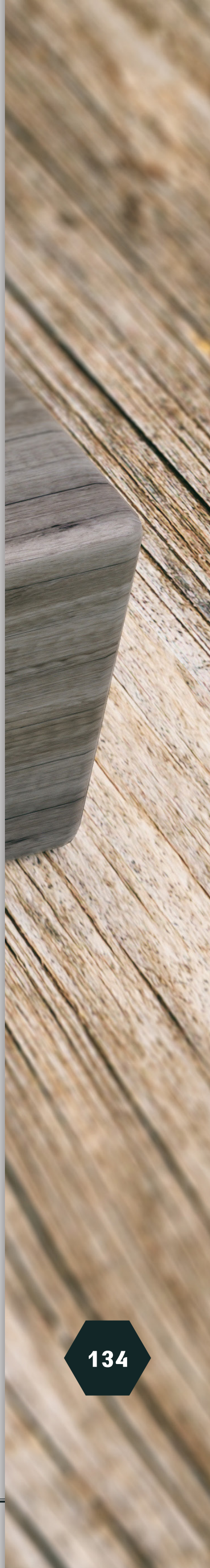
3. ההסתברות שקלע יפגע במטרה בירייה הראשונה היא 0.7. ההסתברות שאותו קלע יפגע במטרה בירייה השנייה היא 0.9 אם פגע בפעם הראשונה, ו- 0.5 אם לא פגע בפעם הראשונה.
א. מהי ההסתברות שהקלע יפגע בשתי הפעמים?
ב. מהי ההסתברות שהקלע יפגע בפעם הראשונה ולא יפגע בפעם השנייה?
ג. מהי ההסתברות שהקלע לא יפגע בפעם הראשונה ויפגע בפעם השנייה?
ד. מהי ההסתברות שהקלע לא יפגע בשתי הפעמים?

ג. הסתברות של מאורעות זרים, הסתברות של מאורעות בלתי תלויים והסתברות של מאורעות תלויים

1. מטילים שתי קוביות הוגנות: אחת כחולה ואחרת אדומה:
א. מהי ההסתברות שבקובייה הכחולה התקבלה התוצאה 3?
ב. מהי ההסתברות שבקובייה האדומה התקבלה התוצאה 4?
ג. מהי ההסתברות שבקובייה הכחולה התקבלה התוצאה 3 **וגם** שבקובייה האדומה התקבלה 4?
ד. מהי ההסתברות שבקובייה הכחולה התקבלה התוצאה 3 **או** שבקובייה האדומה התקבלה התוצאה 4?
ה. מהי ההסתברות שבקובייה הכחולה התקבלה התוצאה 3 **או** שבקובייה האדומה התקבלה תוצאה זוגית?
ו. מהי ההסתברות שבקובייה הכחולה התקבלה התוצאה 3 **וגם** שבקובייה האדומה התקבלה תוצאה זוגית?
ז. מהי ההסתברות שבקובייה הכחולה התקבלה התוצאה 3, **כשידוע** שבקובייה האדומה התקבלה התוצאה 4?

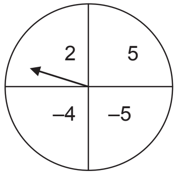
2. בתוך כד יש 12 כדורים, 7 לבנים ו-5 שחורים. מוציאים מהכד שני כדורים באקראי בזה אחר (ללא החזרה).
א מהי ההסתברות שהכדור הראשון היה לבן?
ב. מהי ההסתברות שהכדור השני היה שחור?
ג. מהי ההסתברות שהכדור השני היה לבן, **כשידוע** שהכדור הראשון היה שחור?
ד. מהי ההסתברות שהכדור הראשון היה לבן **וגם** שהכדור השני היה שחור?
ה. האם המאורעות ”הכדור הראשון היה לבן” ו-”הכדור השני היה שחור” הם זרים?
ו. האם המאורעות ”הכדור הראשון היה לבן” ו-”הכדור השני היה שחור” הם בלתי תלויים?

3. מטילים מטבע הוגן 3 פעמים. מהי ההסתברות שבכל 3 ההטלות תתקבל ’תמונה’? מטילים מטבע הוגן 7 פעמים. מהי ההסתברות שבכל 7 ההטלות תתקבל ’תמונה’?

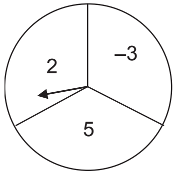


4. מסובבים את המחוגים של שני ה'שעונים' המשורטטים להלן עד לעצירתם.
בכל שעון, העיגול מחולק לחלקים שווים.
א. הדס מנצחת אם שני המחוגים נעצרים על מספר חיובי. יובל מנצח אם שני המחוגים נעצרים על מספר שלילי.
חשבו את ההסתברות של כל אחד מהם לנצח.
ב. אפרת מנצחת אם המכפלה של שני המספרים שעליהם נעצרו המחוגים היא חיובית. אייל מנצח אם המכפלה של שני המספרים שעליהם נעצרו המחוגים היא שלילית.
I. חשבו את ההסתברויות של כל אחד מהם לנצח.
II. האם המשחק הוגן?

שעון I



שעון II



3. טכניקה אלגברית (20 שעות)

א. נוסחאות הכפל (מכפלת דו-איבר בדו-איבר):

$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

פתיחת סוגריים, פירוק לגורמים ופתרון משוואות ריבועיות באמצעות השלמה לריבוע

1. חשבו (מבלי להיעזר בכתיבה) את הביטויים הבאים, בהסתמך על נוסחאות הכפל:

1001^2

79^2

$72 \cdot 68$

2. הדגימו הן באופן גאומטרי והן באופן אלגברי מדוע $31 \cdot 31$ אינו שווה ל: $30 \cdot 30 + 1 \cdot 1$ (דוגמה זו מפריכה את הטענה שסכום הריבועים שווה לריבוע הסכום).
3. פתחו סוגריים וכתבו ביטוי קצר ככל האפשר:
א. $(x + 3)(x - 3)$
ב. $(x + 5)(x - 5) - (2x + 5)^2$
4. נמקו בשתי דרכים שונות מדוע (a – b)2 = (b – a)2
5. עבור אילו ערכים של a ו- b מתקיים כי (a – b)2 = a2 – b2?
6. בדקו מה מתקבל בשני האגפים של נוסחאות הכפל כש: $a = b$ בביטויים: $(a + b)^2$ ו- $(a - b)^2$
7. בדקו האם מתקיים תמיד השוויון $(a - b)^3 = (b - a)^3$. אם כן, הסבירו מדוע, ואם לא, תקנו את המשוואה (מבלי לשנות את האגף השמאלי) כך שתתקיים תמיד.
8. כתבו, אם אפשר, את אחד הסימנים <, > או = כך שהיחס בין שני האגפים יהיה נכון לכל a:
א. a^2 _____ $(a + 1)(a - 1)$

ב. $(a - 1)^2$ _____ $(a + 1)^2$

ג. $a^2 - 1$ _____ $a^2 + 1$

ד. $a^2 + 2a$ _____ $(a + 1)^2 - 1$

ה. $(a + 1)(a - 1)$ _____ $(a + 1)^2$

ו. $(a + 1)(a - 1)$ _____ $(a - 1)^2$

9. פתרו את המשוואה: $(x - 5)^2 = (^{x} + 5)^2$ בדרכים שונות.

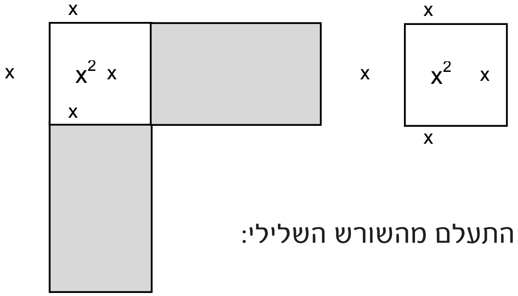
10. כתבו את תחום הצבה של x וצמצמו את השברים: $\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2-1}$, $\frac{6x+8}{9x^2+24x+16}$ $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$,

11. נתון ריבוע שאורך צלעותיו 3a ס"מ. אם נגדיל זוג צלעות מקבילות שלו ב-2 ס"מ ונקטין את שתי הצלעות האחרות ב-2 ס"מ, נקבל מלבן. שטחו של איזה מצולע, הריבוע או המלבן, גדול יותר? ובכמה?

12. א. השלימו את הביטוי: $x^2 + 6x + 5$ לריבוע.

ב. השלימו את הביטוי $4x^2 + 12x + 6$ לריבוע.

13. פתרו את המשוואה: $x2 + 10x = 39$ באמצעות השלמה לריבוע, למשל:



$$x^2 + 2\cdot5\cdot x + 5^2 = 39 + 5^2$$

$$(x + 5)^2 = 64$$

$$x + 5 = \pm 8$$

$$x^1 = 3 \qquad x_2 = -13$$

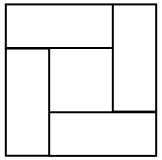
הערה: אלחווריזמי הציע פתרון גאומטרי למשוואה הריבועית. בפתרונו התעלם מהשורש השלילי:

א. זהו את האיברים האלגבריים בצורה גאומטרית.

ב. השלימו את הפתרון בדרך גאומטרית.

14. חשבו את 12^3 בהסתמך על נוסחאות הכפל ובהסתמך על חוקי החזקה.

15. הסבירו כיצד השרטוט הבא מדגים את השוויון: $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$



16. השלימו את הביטוי $(\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_)^2 = \_\_\_\_\_ + 12x + \_\_\_\_$ בשלוש דרכים שונות.

17. הראו ללא שימוש במחשבון איזה ביטוי גדול יותר: $\sqrt{4}+\sqrt{7}$ או $\sqrt{5}+\sqrt{6}$.

18. א. מצאו דוגמאות שונות שבהן מתקיים $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$

ב. האם נכון תמיד ש: $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$?

19. חשבו את הביטויים החשבוניים

$$\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$$

$$\left(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)^2$$

ב. פירוק של תלת-איבר ריבועי (טרינום ריבועי) x^2+bx+c ופתרון משוואות ריבועיות

1. פרקו לגורמים את הביטויים הבאים:
   - א. $x^2+2x+3x+6$
   - ב. $x^2-4x-2x+8$
   - ג. $x^2-x+5x-5$
2. א. הסבירו מדוע לשתי המשוואות הבאות יש את אותם פתרונות:

   $(x-a)(x-b)=0$

   $x^2-(a+b)x+ab=0$

   ב. פתרו את המשוואה: $x^2-5x+4=0$ באמצעות פירוק תלת-איבר.
3. שרטטו על מערכת צירים את הגרפים של הביטויים: $\frac{x^2-9}{x+3}$ $x-3$

   הסבירו מהו ההבדל בין שני הגרפים.
4. פרקו לגורמים, כתבו תחומי הצבה וצמצמו:

   א. $\frac{x+2}{x^2+4x+4}$ ב. $\frac{2a^2-32}{4-a}$ ג. $\frac{x+2}{x-3}\cdot\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$
5. פרקו לגורמים, כתבו תחומי הצבה וצמצמו: $\frac{2a^2-a}{4}:\frac{a^2-2a+1}{8a}$
6. פתרו את המשוואות, כתבו תחומי הצבה ובדקו את הפתרון באמצעות הצבה: א. $\frac{2}{x-3}+\frac{4x}{2x-6}=6$ ב. $\frac{2x}{x^2-4}=\frac{1}{x+2}$ ג. $\frac{x+1}{x^2-4}+\frac{6}{x^2-x-6}=\frac{x}{x^2-5x+6}$

הנחייה: פרקו את המכנים לגורמים והיעזרו בפירוק זה.

4. פונקציות ריבועיות (30 שעות)

א. הפונקציה $f(x)=x^2$ והייצוג הגרפי שלה

1. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים של הפונקציות: $f(x)=x^2$ ו-$g(x)=25$
2. הציגו באופן גרפי את המשוואה $x^2=4$.
3. נתונה הפונקציה $f(x)=x^2$.

   א. האם הנקודות הבאות נמצאות על גרף הפרבולה? $(-1,-1)$, $(-0.5,0.25)$, $(1.1, 1.21)$, $(-\frac{1}{3},\frac{1}{9})$

   ב. הסבירו מדוע הנקודה (a,b) אינה על הפרבולה $f(x)=x^2$ כש- $b<0$.
4. מצאו את שיעורי ה-x של הנקודות הבאות הממוקמות על הפרבולה: $f(x)=x^2$: (_____ , 1,024), (_____ , 0.49). האם קיים רק פתרון אחד? הסבירו.

5. $f(x) = x^2, g(x) = x$.

א. עבור אילו ערכים של x מתקיים $f(x) = g(x)$?

ב. שרטטו את הגרפים של הפונקציות לעיל במערכת צירים אחת, וקבעו עבור אילו ערכים של x מתקיים: $f(x) < g(x)$.
הסבירו את הקשר בין תשובתכם ובין תכונות של כפל של מספרים הגדולים מ-0 וקטנים מ-1.

ב. פונקציות מהצורה $f(x) = ax^2$ כאשר $a \neq 0$ – מתיחה, כיווץ ושיקוף

1. פתרו באמצעים אלגבריים ובאמצעים גרפיים את המשוואות הבאות.
ציינו אם לא קיים פתרון:

א. $3x^2 = 9$

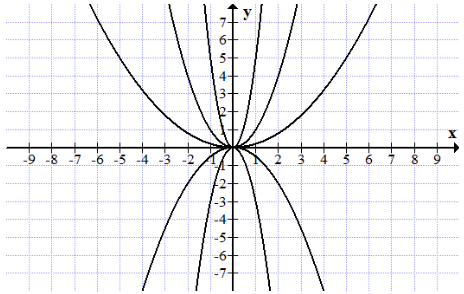
ב. $3.2x^2 = -x^2$

ג. $3x^2 = -3$

2. ציינו תכונות משותפות לגרפים של כל הפרבולות מהצורה $f(x) = ax^2$.

3. שייכו כל נקודה לפונקציה שלה:
$(10,1)$, $(3,0.9)$, $(2,-4)$, $(1,0.5)$
$y = 0.01x^2, y = 0.5x^2, y = -x^2, y = 0.1x^2$

4. שייכו כל גרף לפונקציה:
$y = 0.2x^2, y = -3x^2, y = x^2, y = 5x^2, y = -0.5x^2$



5. נתונות שתי הפונקציות: $f(x) = x^2$ ו- $g(x) = ax^2$
מה היחס בין $f(952.5)$ לבין $g(952.5)$?

6. הנקודה $(3,3)$ ממוקמת על גרף הפונקציה $y = ax^2$.

א. מהו a?

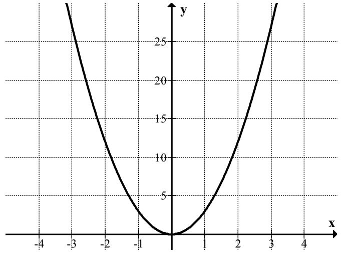
ב. כתבו שיעורים של עוד שתי נקודות הממוקמות על אותו הגרף.

7. א. מהן כל הנקודות במישור שדרכן עוברת פרבולה מהצורה $y = ax^2$?

ב. האם דרך כל שתי נקודות על המישור עוברת פרבולה מהצורה $y = ax^2$? הסבירו.

ג. פונקציות מהצורה $f(x) = ax^2 + c$ כאשר $a \neq 0$ – הזזות אנכיות

1. נתון הגרף של הפונקציה $f(x) = 3x^2$.



שרטטו את הגרף של הפונקציה $g(x) = 3x^2 - 2$

2. מצאו את כל הפתרונות (אם קיימים) של המשוואות הבאות:

א. $5x^2 + 2 = 12$

ב. $3x^2 - 6 = -12$

3. מצאו בדרך אלגברית ובדרך גרפית את נקודות החיתוך של הפרבולה $y = 4x^2 - 9$ עם ציר ה- x וציר ה- y. כתבו את התחום שבו הפונקציה חיובית ואת התחום שבו היא שלילית.

4. נתון שערכי הפונקציה $f(x) = ax^2 + c$ חיוביים לכל ערך של x.

מה תוכלו לומר על הערכים של הפרמטרים a ו- c?

5. נתון ריבוע. אם נגדיל שתי צלעות נגדיות שלו ב- 3 ס"מ ונקטין את שתי הצלעות האחרות ב- 3 ס"מ יתקבל מלבן. אם נגדיל כל אחת מצלעות הריבוע פי 2 יתקבל ריבוע אחר (ריבוע ב). שטח ריבוע ב גדול ב- 84 סמ"ר משטח המלבן. מה שטח הרבוע הנתון?

6. עבור אילו ערכים של k יש למשוואה -$3x^2 - 5 = k$ שני פתרונות? פתרון אחד? לא קיים פתרון?

7. נתונות הפונקציות: $f(x) = 2x^2$, $g(x) = 2x^2 + 10$. מה ההפרש בין שיעורי ה- y של שתי הפונקציות כש- $x = 2$? כש- $x = 952.5$?

8. מצאו את נקודות החיתוך של שתי הפרבולות, ומצאו מהו המרחק בין שני הקדקודים שלהן במקרים הבאים:

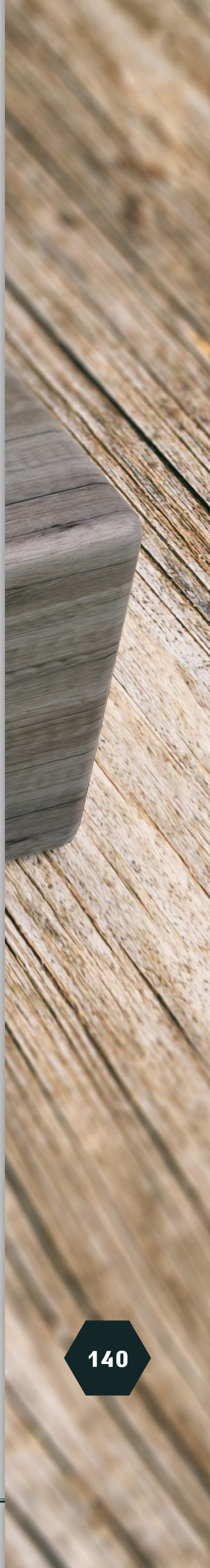
א. $y = 2x^2 - 8$ ו- $y = -2x^2 + 8$.

ב. $y = 2x^2 + 8$ ו- $y = -2x^2 + 8$.

9. הראו באופן גרפי ובאופן אלגברי כי לגרפים של הפונקציות $y = 2x^2 + 8$ ו- $y = -2x^2 - 8$ אין נקודות חיתוך. מצאו מהו המרחק בין שני הקדקודים של שתי הפרבולות.

ד. הרכבה של הזזות אופקיות ואנכיות; מתיחה וכיווץ של הפונקציה $f(x) = x^2$ פונקציות שהביטוי האלגברי שלהן הוא: $g(x) = (x - p)2, m(x) = a(x - p)^2, t(x) = a(x - p)^2 + k$ (כאשר $a \neq 0$)

1. נתונה הפונקציה $y = (x - 2)^2$
   - א. מצאו פונקציה שיש לה אותו ציר סימטרייה כמו לפונקציה הנתונה, ויש לה שתי נקודות חיתוך עם ציר x.
   - ב. מצאו פונקציה שיש לה אותו ציר סימטרייה כמו לפונקציה הנתונה, ולא קיימות עבורה נקודות חיתוך עם ציר x.
2. נתונה הפונקציה $f(x) = (x - 4)^2 - 9$.
   - א. מצאו את קדקוד הפרבולה, ואת תחומי העלייה והירידה שלה.
   - ב. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר x, וכתבו את תחומי החיוביות והשליליות שלה.
   - ג. מצאו פונקציה נוספת שיש לה אותו ציר סימטרייה כמו של $f(x)$ אבל יש לה נקודת מקסימום.
   - ד. שרטטו על אותה מערכת צירים את הגרפים של שתי הפונקציות, ומצאו את המרחק בין קדקודי הפרבולות.
3. נתונה הפונקציה $y = (x - 2)^2$.
   - א. מצאו פונקציה שיש לה אותו ציר סימטרייה כמו לפונקציה הנתונה, ויש לה שתי נקודות חיתוך עם ציר x.
   - ב. מצאו פונקציה שיש לה אותו ציר סימטרייה כמו לפונקציה הנתונה, ולא קיימות עבורה נקודות חיתוך עם ציר x.
4. נתונה הפונקציה $f(x) = (x - 4)^2 - 9$.
   - א. מצאו את קדקוד הפרבולה, ואת תחומי העלייה והירידה שלה.
   - ב. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר x , וכתבו את תחומי החיוביות והשליליות שלה.
   - ג. מצאו פונקציה נוספת שיש לה אותו ציר סימטרייה כמו של $f(x)$, אבל יש לה נקודת מקסימום.
   - ד. שרטטו על אותה מערכת צירים את הגרפים של שתי הפונקציות, ומצאו את המרחק בין קדקודי הפרבולות.
5. הציגו את הפונקציות הבאות בצורה $y = (x - p)^2 + k$, ומצאו את נקודת המינימום / מקסימום שלהן בדרך אלגברית או גרפית:
   - א. $f(x) = x^2 - 6x + 9$
   - ב. $g(x) = (x - 4)(x + 4)$
6. א. מצאו פונקציה ריבועית מהצורה $y = a(x - p)^2 + k$ שהקדקוד שלה הוא הנקודה (1,2).
   - ב. כמה פונקציות שונות כאלה קיימות? הסבירו.
7. א. מצאו פונקציה ריבועית מהצורה $y = a(x - p)^2 + k$ שהגרף שלה עובר דרך הנקודה (1,2), אך נקודה זו אינה קדקוד הפרבולה.
   - ב. כמה פונקציות שונות כאלה קיימות? הסבירו.
8. נתונות שתי פונקציות מהצורה $y = a(x - p)^2 + k$. אילו פרמטרים בשתי הפונקציות שווים, אם ידוע שלשתיהן אותו קדקוד? הסבירו.
9. הציגו את הפונקציה $f(x) = x^2 - 2x$ בצורה: $y = a(x - p)^2 + k$ ושרטטו את הגרף שלה.



ה. הפונקציה הריבועית וייצוגיה האלגבריים השונים

1. א. מצאו את ציר הסימטרייה של גרף הפונקציה $y = 2x^2 - 6x + 5$

ב. שרטטו סקיצה של הפרבולה.

2. ציר הסימטרייה של גרף הפונקציה $y = (x - 1)(x - 3)$ הוא $x = 2$.

הסבירו בשתי דרכים שונות כיצד ניתן להסיק זאת.

3. לפונקציה $y = (x - 6)(x + 2)$ שתי נקודות חיתוך עם ציר x.

א. מהו קדקוד הפרבולה?

ב. מה צריך להיות הערך p בפונקציה $y = (x - 6)(x + 2) + p$ כדי שקדקוד הפרבולה יהיה (1,0)?

ג. מה צריכים להיות ערכי t בפונקציה $y = (x - 6)(x + 2) + t$ כדי שהפרבולה תהיה חיובית לכל x?

4. להלן רשימה של זוגות של פונקציות זהות; התאימו בין הזוגות. (עשו זאת בדרך אלגברית או בדרך גרפית):

$y = (x + 1)^2 - 4$, $y = (x - 1)^2 - 4$, $y = -(x - 1)^2 + 4$

$y = (x + 1)(x - 3)$, $y = x^2 - 4x + 4$, $y = (x - 1)(x + 3)$

$y = (x - 2)(x - 2)$, $y = (3 - x)(x + 1)$

א. כתבו את הפונקציה הריבועית $f(x) = x^2 - 6x + 8$ בשני ייצוגים נוספים.

ב. שרטטו את גרף הפונקציה ומצאו את:

1. נקודות החיתוך עם הצירים;
2. ציר הסימטרייה ושיעורי הקדקוד;
3. תחום העלייה ותחום החיוביות.

3. חזרו על סעיפים א ו-ב עם הפונקציות הריבועיות: $g(x) = x^2 - 6x + 9$ ו- $h(x) = x^2 - 6x +10$.

הסבירו מה התאפשר ומה לא התאפשר, ומדוע.

ו. פתרון משוואות ריבועיות ופתרון שאלות מילוליות

1. פתרו את המשוואות הבאות, והקפידו לכתוב את תחומי ההצבה:

א. $4(x^2 + 1) + 6 = (x + 6)^2 - (x + 1)(x - 1)$

ב. $\frac{(x+3)^2-4}{x+1}=0$

ג. $\frac{x-3}{x^2-49}-\frac{1}{x-7}+\frac{12}{x^2+7x}=0$

ד. $\frac{1}{4}+\frac{5}{4x^2-100}=\frac{2}{10-2x}$

2. נתונות הפונקציות:

$f(x) = -2(x - 4)(x + 2)$

$g(x) = x - 4$

א. באיזה תחום $f(x) > 0$

ב. באיזה תחום $f(x) < g(x)$

ג. K הוא קדקוד הפרבולה. כתבו את משוואת הישר המקביל לגרף של $g(x)$ ועובר דרך הנקודה K.

ד. מהו התחום שבו המכפלה $f(x) \cdot g(x)$ היא חיובית? נמקו את תשובתכם.

3. נתונים הפרבולה $y = x2$ ושני הישרים $y = 2x, y = -2x$

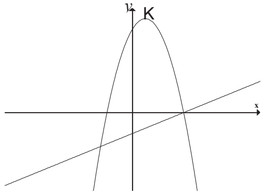
הגרפים של שלוש הפונקציות נחתכים בראשית הצירים (O).

א. מצאו נקודת חיתוך נוספת של כל אחד מהישרים עם הפרבולה. סמנו את נקודות החיתוך ב- A ו- B.

ב. מצאו נקודה M כך שהמרובע AOBM יהיה מעוין.

4. בכנס שנושאו 'חידושים בבניית טיסנים' נפגשו כמה תלמידים. כל אחד מהם לחץ את ידי כל האחרים. כמה תלמידים נפגשו, אם בסה"כ נספרו 435 לחיצות ידיים?

5. אורך היתר במשולש ישר זווית הוא 26 ס"מ. אחד הניצבים ארוך ב-4 ס"מ משתי פעמים הניצב האחר. מהו היקף המשולש?



6. חברת אוטובוסים מציעה לבתי ספר את המחירון הבא:

עבור 40 תלמידים המחיר הוא 100 שקלים לתלמיד. כל תלמיד נוסף מוזיל את המחיר לתלמיד ב-2 שקלים. כמה תלמידים השתתפו בטיול, אם עלותו הייתה 4,050 שקלים?

7. יואב רכב על אופניו מרחק של 30 ק"מ.

האופניים התקלקלו, והוא המשיך בדרכו בהליכה במהירות קבועה, מרחק של 8 ק"מ. את הדרך כולה עבר יואב ב- 5 שעות. מהירות ההליכה הייתה קטנה ב- 6 קמ"ש ממהירות הרכיבה. מהי המהירות שבה רכב יואב?

8. מחירו של מוצר היה 8 שקלים. לאחר שמחירו ירד באחוז מסוים ועלה שוב באותו האחוז, היה מחירו 7.82 שקלים. בכמה אחוזים ירד ערכו של המוצר בתחילה?

9. נתון דף נייר בצורת מלבן שאורכו 20 ס"מ ורוחבו 10 ס"מ. רוצים לחתוך מתוכו מלבן פנימי כך שרוחב השוליים שיישארו יהיה שווה בארבעת הצדדים. נסמן ב-x את רוחב השוליים שמשאירים בכל צד של המלבן.

א. מהו הביטוי שמתאר את התחום האפשרי של השוליים? (סמנו את התשובה הנכונה).

(1) $x < 10 > 0$

(2) $x < 10 > 5$

(3) $x < 5 > 0$

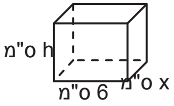
ב. מהו רוחב השוליים, אם שטח המלבן הפנימי הוא 56 סמ"ר?

10. יש למקם מוט שאורכו 13 ס"מ בתוך תיבה שממדיה הם: רוחב x ס"מ, אורך $x + 1$ ס"מ וגובה $x + 9$ ס"מ. מהם ממדי התיבה הקטנה ביותר שבתוכה אפשר למקם את המוט?

11. נבחר מספר, נעלה אותו בריבוע ונחסיר מהתוצאה את מכפלת המספר שבחרנו ב-4.
א. כתבו פונקציה המתאימה למספר שבחרנו את התוצאה הסופית שתתקבל.
ב. מה צריך להיות המספר שנבחר כדי שתתקבל תוצאה מינימלית (קטנה ביותר)?
ג. מהי אותה תוצאה מינימלית?

12. נתון מלבן שהיקפו 32 ס"מ.
א. סמנו את אורך צלע המלבן ב- x, וכתבו פונקציה המתאימה לאורך צלע המלבן את שטח המלבן.
ב. מה צריך להיות אורך צלע המלבן כדי ששטח המלבן יהיה מרבי?
ג. מהו השטח המרבי?

13. יוצרים שלד של תיבה מחוט מתכתי שאורכו 56 ס"מ. אורך אחד המקצועות בתיבה הוא 6 ס"מ. מה צריכים להיות אורכי שני המקצועות הנוספים כדי שנפח התיבה יהיה מקסימלי?



14. המרחק בין שני ישובים, A ו- B, הוא 200 ק"מ.
מכונית יצאה מהישוב A ליישוב B במהירות 60 קמ"ש.
בו-זמנית יצא רוכב אופנוע מהיישוב B ליישוב C במהירות 50 קמ"ש.
הכביש בין היישובים A ו- B מאונך לכביש בין היישובים B ו- C.
א. כמה זמן אחרי שכלי הרכב יצאו לדרכם, היה ריבוע המרחק ביניהם מינימלי?
ב. מהו אותו מרחק מינימלי?

15. פתרו את המשוואות הבאות:

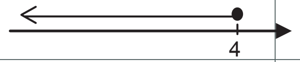
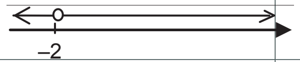
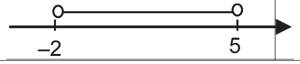
$(2x)^2 + 6\cdot 2x + 8 = 0$

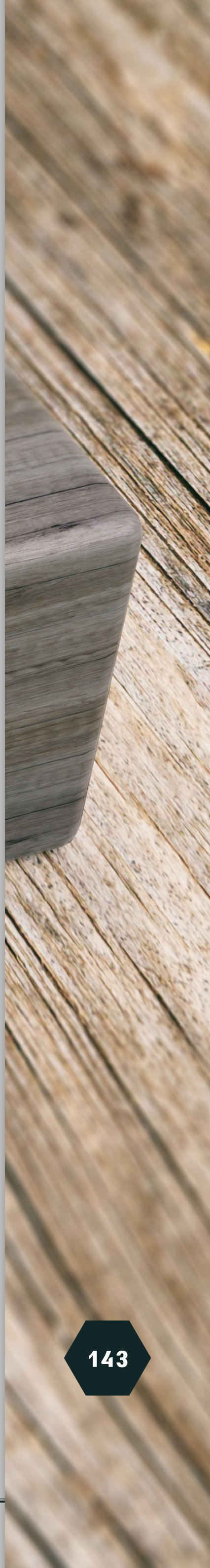
$(2x-1)^2 - 6x + 3 - 4 = 0$

$x^4 - 7^{x2} +12 = 0$

ז. אי שוויונות ריבועיים

1. התאימו לביטוי האלגברי של האי-שוויון את הייצוג הגרפי המתאים:

$-2 < x < 5$	·	·	
$x < -1$ או $x > 3$	·	·	
$x \leq 4$	·	·	
$x \neq -2$	·	·	



2. פתרו את האי-שוויונות הבאים:

א. $3x^2 - 9x - 10 < -1 - 3x$

ב. $(x + 3)^2 + 5 > 2$

ג. $-(x + 2)2 \le 1$

3. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 + 6x + 9$. היעזרו בשרטוט גרף מתאים כדי להתאים לכל אי-שוויון את הפתרון שלו:

$x^2 + 6x + 9 > 0$	·	·	כל מספר הוא פתרון
$x^2 + 6x + 9 < 0$	·	·	$x = -3$
$x^2 + 6x + 9 \ge 0$	·	·	$x \ne -3$
$x^2 + 6x + 9 \le 0$	·	·	אין פתרון

4. פתרו את האי-שוויונות הבאים. הסבירו את דרך הפתרון.

א. $\frac{x^2 - 7x + 10}{(x-1)^2} < 0$

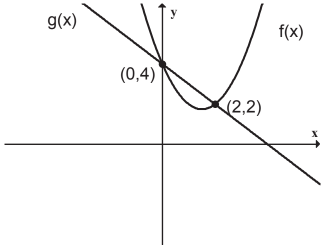
ב. $\frac{x^2 + 9x + 14}{(x-1)^2} > 0$

5. במשולש ישר זווית אורך ניצב אחד הוא 5 ס"מ ואורך הניצב השני הוא 6 ס"מ. האריכו את כל אחד מהניצבים ב- x ס"מ. מה יכול להיות תחום הערכים של x, אם ידוע ששטח המשולש שהתקבל גדול מ- 36 סמ"ר.

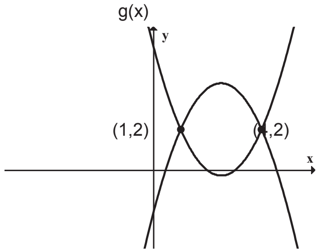
6. לפניכם משורטטים גרפים של שתי פונקציות: f(x) ו- g(x) וכן נתונות נקודות החיתוך של הפונקציות.

עבור כל אחד מארבעת זוגות הגרפים הבאים כתבו את התחום שבו $g(x) > f(x)$:

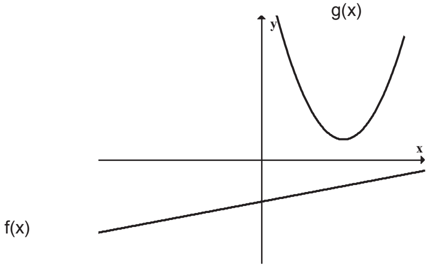
א.



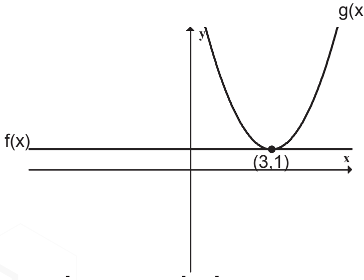
ב.



ג.



ד.



ח. מערכת משוואות לא ליניאריות של שתי משוואות בשני נעלמים ופתרון שאלות מילוליות

1. פתרו את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} xy = 20 \\ (x+6)(y-3) = 20 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 3 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 - 3y = 6 \end{cases}$$

2. מצאו את נקודות החיתוך של הפרבולה והישר:

$f(x) = x^2 - 4x + 5$

$g(x) = 0.5x + 3$

3. ענו על השאלות הבאות:
   - א. היקפו של מלבן הוא 32 ס"מ ושטחו 48 סמ"ר. מהם אורכי הצלעות של המלבן?
   - ב. היקפו של מלבן הוא 34 ס"מ. אורך האלכסון הוא 13 ס"מ. מהם אורכי הצלעות של המלבן?
   - ג. ברק עבר מרחק של 30 ק"מ בהליכה במשך זמן מסוים. בדרכו חזרה הגדיל את מהירותו ב-1 קמ"ש, וכתוצאה מכך התקצר זמן ההליכה בשעה אחת. מה הייתה המהירות של ברק בדרך הלוך?
   - ד. לקבוצת תלמידים הוזמן מרצה בעלות של 2,000₪. אם הקבוצה הייתה מונה 20 תלמידים יותר, העלות לכל תלמיד הייתה פוחתת ב- 50 שקלים. כמה תלמידים מנתה הקבוצה, ומה הייתה העלות לכל תלמיד?

5. שימושים באלגברה (5 שעות)

דגש 1:

1. רשמו שלוש אפשרויות לייצוג שלושה מספרים עוקבים כלשהם. חברו את שלושתם, ונסו להסיק מכל אחת מהאפשרויות שהצעתם אילו תכונות יש לסכום (איזה סוג מספר מתקבל).
2. הראו כי מתקיים השוויון $2\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{2\frac{2}{3}}$ ומצאו מספרים אחרים שעבורם מתקיים שוויון כזה.

את הדוגמה ניתן להכליל בשלושה אופנים נפרדים על ידי בחירה שונה של המשתנים. בחירה אחת מובילה להכללת יתר, בחירה אחרת מובילה להכללת חסר, ובחירה נוספת להכללה מועילה.

הכללת יתר: $a\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$

כללת חסר: $a\cdot\sqrt{\frac{a}{a+1}}=\sqrt{a+\frac{a}{a+1}}$

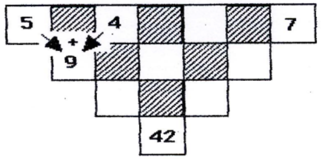
הכללה מועילה: $a\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{a+\frac{a}{b}}$

דגש 2:

1. חשבו את 97 × 103 בעזרת החוק $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, וחשבו 1002^2 בעזרת החוק של ריבוע של סכום.
2. התבססו על ידיעותיכם על הפונקציה הריבועית כדי לקבוע איזה משני האומדנים המוצעים (50 × 90 או 60 × 80) הוא קירוב טוב יותר ל- 55 × 85? (הערה: לצורך חקירה זאת ניתן להיעזר בפונקציה $f(x) = x(140 - x)$ ובייצוג הגרפי שלה, תוך כדי ניתוח השתנותה.)

דגש 3:

1. בסידור שלהלן, יש למלא את התאים הריקים במספרים, כך שבכל תא לבן יופיע הסכום של המספרים שבתאים הלבנים הסמוכים שבשורה שמעליו. בסידור זה, רק ה'קדקודים' נתונים (כלומר: 5, 7 ו-42), וכדוגמה מילאנו את אחד התאים. הציבו מספרים במשבצות הלבנות כך שהכלל יתקיים בכל התאים. האם ייתכן יותר מפתרון אחד? נמקו.



2. להלן דוגמה של מכפלה שבה שני גורמיה הם מספרים דו-ספרתיים: 39 × 31. חשבו את תוצאתה. כעת החליפו את סדר הספרות בתוך כל אחד מהגורמים, וחשבו את התוצאה של המכפלה החדשה (93 × 13). מה הקשר בין שתי התוצאות? האם קשר זה מקרי (מתקיים רק בדוגמה זו? קורה לפעמים? או תופעה כללית עבור כל מכפלה בין שני גורמים דו-ספרתיים? נמקו.

דגש 4:

1. פתרו את המשוואה $\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2 = 1 - \frac{2x^2}{x+1}$ בעזרת הנוסחה של פתרון משוואה ריבועית (ועל ידי החלפת משתנים).
2. כיצד ניתן לדעת, מבלי לפתור, כי אין פתרון למשוואה $\frac{2x+3}{4x+6} = 2$?

דגש 5:

1. לבטח הנכם מכירים מספרים ראשוניים גדולים מ- 19. אבל להלן "הוכחה" לכך שלא קיימים מספרים ראשוניים גדולים מ- 19: ניקח מספר n כלשהו, כך ש $n > 19$, אם n זוגי, אזי הוא לא ראשוני. אבל, אם n הוא אי-זוגי, אזי המספרים $\frac{n+1}{2}$ ו- $\frac{n-1}{2}$ הם מספרים טבעיים ומתקיים השוויון הבא: $n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2$, וזהו ביטוי מהצורה $n = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

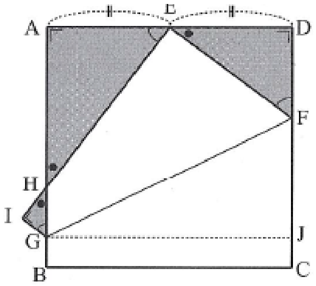
   כלומר: ניתן לבטא את n כמכפלה של שני גורמים, ולכן הוא איננו מספר ראשוני. כיצד תיישב את הסתירה: מצד אחד, אתם מכירים מספרים גדולים מ- 19 שהם ראשוניים, ומצד שני לפנינו "הוכחה" שאין כאלה?
2. בחרו מספר אי זוגי כלשהו, העלו אותו בריבוע והחסירו 1 מהתוצאה. הראו כי המספר שהתקבל הוא תמיד כפולה של 8.
3. הוכיחו כי $\sqrt{3}$ הוא מספר אי-רציונלי.

דגש 6:

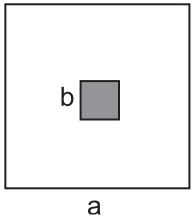
1. להלן אמירה: "נתונים שני מספרים חיוביים; הסכום של הופכיהם שווה להופכי של סכומם". האם אמירה זו מתקיימת עבור כל זוג מספרים? עבור זוגות מסוימים בלבד? או אינה מתקיימת עבור אף זוג מספרים? נמקו.
2. מצאו שני מספרים טבעיים, a ו-b , שמקיימים: $4a + 4b - ab = 8$.

דגש 7:

1. קחו נייר בצורת ריבוע כלשהו. על ידי קיפול, סמנו את אמצע הקטע של אחת מצלעותיו. כעת הביאו על ידי קיפול את אחד הקדקודים של הצלע הנגדית (לזו שבה מסומן האמצע) אל נקודת האמצע שסימנתם (כמו שמראה הציור):



הראו כי בכל אחד משלושת המשולשים המסומנים באפור, היחס בין הצלעות הוא 3:4:5.



2. נתונים שני מספרים חיוביים: a ו- b. להלן שלושה ביטויים אלגבריים:

$$2a,\ \sqrt{2}(a-b)+2b,\ \sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$$

כל אחד מהביטויים הנ"ל מבטא מרחק הליכה אפשרי בין פינות הכיכר ריבועית (שאורך צלעה a) אשר במרכזה ערוגה ריבועית (שאורך צלעה b), שאסור לעבור דרכה. סמנו על השרטוט כל אחד מהמסלולים, וציינו איזה הוא הקצר מביניהם.

3. א. חשבו את הערך של הביטוי $a^2 - b^2$ על פי המשוואה הבאה:

$$(a \neq b)\quad \frac{a-b}{a^2-2ab+b^2}-\frac{3}{b-a}=a+b\quad (a \neq b)$$

ב. שטחו של המשושה שלפניכם הוא 32 סמ"ר.

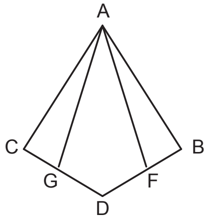
I. איזה מבין הערכים הבאים יכול להיות הערך של a:

$5.5,\ \sqrt{32},\ 7$? נמקו.

II. מה יכולים להיות הערכים של a ו- b אם ידוע שהם מספרים טבעיים?

2. דלתון ומשולש שווה שוקיים

1. הסבירו מדוע כל ריבוע הוא דלתון.
2. את המשפט: "האלכסונים בדלתון מאונכים זה לזה" צריך לדעת לנסח באופן הבא: **אם** מרובע הוא דלתון (כלומר אם יש לו שני זוגות זרים של צלעות סמוכות השוות זו לזו), **אזי** האלכסונים שלו מאונכים זה לזה.
3. את המשפט בדוגמה 2 יש לדעת לנסח באופן הבא:
   נתון: מרובע ABCD,
   AB=AD וגם BC=DC
   צ"ל: AC⊥BD
4. המרובע ABDC הוא דלתון. (AB=AC, CD=BD)
   F נקודה על הצלע BD , ו- G נקודה על הצלע CD.
   נתון: CG = BF
   צריך להוכיח: המרובע AGDF הוא דלתון.



לפניכם הוכחה. הסבירו כל שלב בה:

נראה שני שוויונות: AF=AG וגם DF=DG.

כדי להראות את השוויון הראשון נציג שני משולשים החופפים זה לזה: ΔACG≅ΔABF.

AC=AB (צלעות סמוכות שוות בדלתון, לפי הנתון).

∡B=∡C (בדלתון זוויות הצד שוות זו לזו).

CG=BF (נתון).

⇓

ΔABF≅ΔACG (לפי צלע-זווית-צלע).

⇓

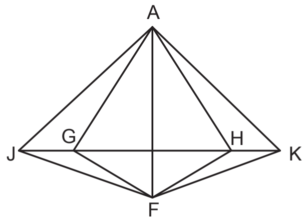
AF=AG (במשולשים חופפים צלעות מתאימות שוות זו לזו).

CD=BD (צלעות סמוכות בדלתון, לפי הנתון).

FD=GD (הפרשים של קטעים שווים) (BD-BF = CD-CG)

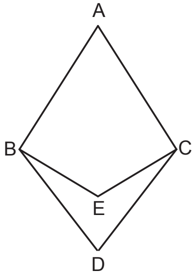
⇓

AGDF דלתון (AF=AG, FD=GD)

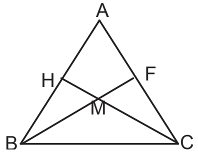


5. AHFG דלתון.
J ,K נקודות על המשך האלכסון המשני GH משני צדדיו.
HK=GJ
הוכיחו שהמרובע AKFJ הוא דלתון.
רמז: האלכסון הראשי הוא ציר סימטרייה המרמז על קיומם של 4 זוגות של משולשים חופפים, שמתוכם שני זוגות רלוונטיים להוכחה.

6. המרובעים ACEB ו- ACDB הם דלתונים.
(AB=AC, BE=CE, CD=BD)
א. הוכיחו ש ∢ECD=∢EBD
ב. הוכיחו שהמרובע DCEB הוא דלתון.

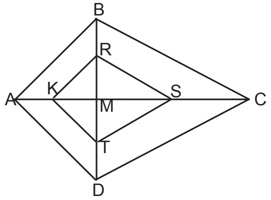


7. ABC משולש שווה שוקיים, ו- D אמצע הבסיס BC.
E נקודה על השוק AB ו- H נקודה על השוק AC כך ש- AE=AH.
א. הוכיחו כי DE=DH
ב. הוכיחו כי המרובע AEDH הוא דלתון.



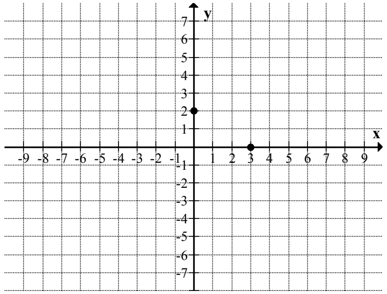
8. א. הוכיחו שבמשולש שווה שוקיים ABC התיכונים לשוקיים שווים זה לזה (BF=CH).
ב. נסמן את נקודת חיתוך התיכונים לשוקיים ב- M.
הראו כי AHMF הוא דלתון.

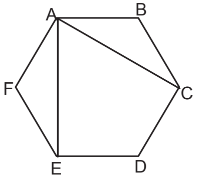
9. אורכו של האלכסון הראשי בדלתון הוא 28 ס"מ ואורכו של האלכסון המשני הוא 48 ס"מ.
האלכסון המשני מחלק את האלכסון הראשי ביחס של 5:9.
א. מצאו את היקף הדלתון ואת שטחו.
ב. קבעו כיצד היו משתנים, אם בכלל, שטח הדלתון והיקפו, אילו האלכסון הראשי היה מחולק ביחס של 6:9 או של 9:9.



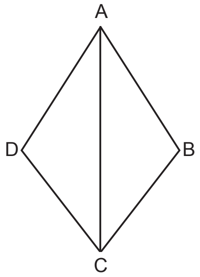
10. M היא נקודת חיתוך האלכסונים בדלתון ABCD.
הנקודות K, R, S, T ממוקמות באמצעי הקטעים המחברים את קדקודי הדלתון עם M.
הוכיחו כי KRST הוא דלתון.

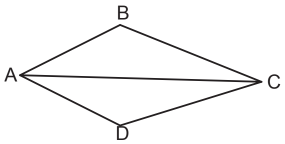
11. (0,2) ו– (3,0)הם שיעורים של שני קדקודים סמוכים של דלתון.
א. מצאו שיעורים של עוד שתי נקודות שיכולות להיות שני הקדקודים האחרים. כמה דלתונים שונים אפשר למצוא? נמקו.
ב. האם תיתכנה שתי נקודות כאלה שאינן על הצירים?



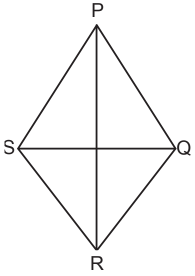


12. מהו סכום הזוויות הפנימיות של דלתון? הוכיחו.
13. ABCDEF הוא משושה משוכלל. הוכיחו כי ACDE דלתון.
14. במרובע ABCD חוצה האלכסון AC את הזוויות הנגדיות A ו– C.
הוכיחו כי המרובע הוא דלתון.
ציינו את השרשרת ההיסקית המובילה מהנתונים לקיום תנאי ההגדרה של דלתון:
א. מהנתונים נובעת חפיפת המשולשים ABC ו-ADC.
ב. מרובע שבו שני זוגות זרים של צלעות סמוכות השוות זו לזו הוא דלתון.





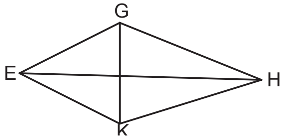
15. במרובע ABCD נתון כי AB=AD, וכי האלכסון AC חוצה את הזווית A.
הוכיחו כי המרובע הוא דלתון.
פרטו את השרשרת ההיסקית המובילה מהנתונים לקיום תנאי ההגדרה של דלתון.



16. האלכסון PR במרובע PQRS מאונך לאלכסון השני וחוצה אותו.
הוכיחו כי המרובע הוא דלתון.
פרטו שתי שרשרות היסקיות המובילות מהנתונים לקיום תנאי ההגדרה של דלתון:

שרשרת א:
א. מהנתונים נובעת חפיפת המשולשים PHQ ו-PHS ‏(H חיתוך האלכסונים).
ב. נובע כי זוג של צלעות סמוכות שווה זו לזו.
ג. הליך דומה תקף לגבי המשולשים RHS ו-RHQ.
ד. זוגות הצלעות הסמוכות השווה זו לזו הם זרים.
ה. מרובע שבו שני זוגות זרים של צלעות סמוכות השווה זו לזו הוא דלתון.

שרשרת ב:
א. במשולש PSQ התיכון מתלכד עם הגובה, ולכן הוא שווה שוקיים.
ב. במשולש RSQ התיכון מתלכד עם הגובה, ולכן גם הוא שווה שוקיים.
ג. זוגות הצלעות הסמוכות השווה זו לזו הם זרים.
ד. מרובע שבו שני זוגות זרים של צלעות סמוכות השווה זו לזו הוא דלתון.



17. האלכסון EH במרובע EGHK חוצה את הזווית E ומאונך לאלכסון האחר.
הוכיחו כי המרובע הוא דלתון.
פרטו שתי שרשרות היסקיות המובילות מהנתונים לקיום תנאי ההגדרה של דלתון.

3. בניות בסיסיות

דוגמאות שמעבר לבניות הבסיסיות:

1. הראו כי אפשר לבנות שני משולשים שאינם חופפים כשנתונות שתי צלעות וזווית שאיננה כלואה ביניהן.
2. נתונים שני קטעים וזווית.

הדגימו כי הדרישות הבאות אינן מספיקות כדי לאפיין צורה יחידה:

א. בנו שני דלתונים שונים שבהם אורכי הצלעות הם a ו- b.

ב. בנו שני דלתונים שונים (דלתון קמור ודלתון קעור) שבהם הצלע היא a, וזוויות הראש הן b ו- 2β.

ג. בנו שני דלתונים שונים שבהם האלכסון הראשי הוא a, והאלכסון המשני הוא b.

3. הראו כי אי-אפשר לבנות דלתונים שבהם:

א. האלכסון הראשי מחלק את האלכסון המשני ביחס של 1 : 2.

ב. הצלעות הן a ו- b, ואחד האלכסונים הוא c, כש- c ארוך מ-a+b.

ג. הצלעות a ו- b כנ"ל, והזוויות בקדקודים הראשיים שוות זו לזו.

4. הראו כי הדרישות הבאות מאפיינות צורה יחידה. הסבירו מדוע.

א. דלתון שבו נתונות הצלעות a ו- b, ונתון האלכסון הראשי c.

ב. דלתון קמור שבו נתונות הצלעות a ו- b, והזווית בין שתי הצלעות הקצרות היא זווית במשולש שווה צלעות.

ג. דלתון קעור שבו נתון האלכסון הראשי a, וזוויות הראש הן b ו- 2β.

5. לפניכם שתי תכניות לבניית דלתון קמור שבו הצלע היא a, האלכסון המשני הוא b והאלכסון הראשי הוא c.

קבעו איזו מהתכניות מבוססת היטב, ובאיזו יש פגם. נמקו את התשובה.

תוכנית ראשונה:

א. שרטטו קטע באורך b. סמנו את קצותיו באותיות B, D. אלה הם שני הקדקודים של הדלתון שבקצות האלכסון המשני.

ב. העבירו אנך אמצעי לקטע. על ישר זה יעבור האלכסון הראשי של הדלתון.

ג. מהנקודה B, חוגו קשת שרדיוסה a. סמנו באות A את נקודת החיתוך שלה עם האלכסון הראשי.

ד. מהנקודה A הקצו על האנך האמצעי קטע c החותך את הקטע BD. סמנו את קצה הקטע באות C.

ה. ABCD הוא הדלתון המבוקש.

תוכנית שנייה:

א. שרטטו קטע באורך c. סמנו את קצותיו באותיות A, C. אלה הם שני הקדקודים של הדלתון שבקצות האלכסון הראשי.

ב. מהנקודה A חוגו מעגל שרדיוסו a. הקדקודים B ו- D יהיו מונחים על מעגל זה.

ג. העבירו אנך לאלכסון AC באורך הקטע b, כך שייחתך עם המעגל בנקודות B ו- D.

ד. ABCD הוא הדלתון המבוקש.

6. לפניכם שלוש תכניות לבניית משולש שווה שוקיים על פי השוק וזווית בסיס.

קבעו איזו מהתכניות מבוססות היטב, ובאיזו יש פגם. נמקו את התשובה.

תוכנית ראשונה:

העתיקו את הזווית הנתונה. מקדקוד הזווית הקצו על אחת מהשוקיים של הזווית את הקטע הנתון. מהקצה השני של הקטע חוגו קשת ברדיוס שאורכו הקטע הנתון. המשיכו את שוק הזווית שעליה לא הקציתם את הקטע הנתון עד לנקודה שבה השוק נחתכת עם הקשת. חברו בין קצות הקטעים. התקבל המשולש שווה השוקיים המבוקש.

תוכנית שנייה:

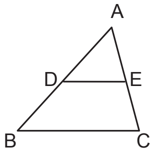
העתיקו את הזווית הנתונה. מקדקוד הזווית הקצו על אחת מהשוקיים של הזווית את הקטע הנתון. בקצה הקטע העתיקו את הזווית הנתונה. המשיכו את שוקי הזוויות שעליהן לא הקציתם את הקטע הנתון עד לנקודה שבה השוקיים נחתכות זו עם זו. התקבל המשולש שווה השוקיים המבוקש.

תוכנית שלישית:

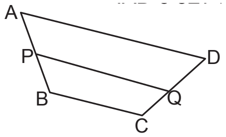
שרטטו זווית כפולה לזווית הנתונה. שרטטו את הזווית הצמודה לזווית הכפולה. זוהי זווית הראש במשולש. על כל אחת משוקי הזווית הקצו קטע באורך השוק הנתונה. חברו את שני קצות השוקיים. התקבל המשולש שווה השוקיים המבוקש.

3. ישרים מקבילים וטרפז

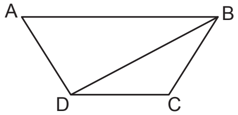
1. בנו טרפז שווה שוקיים בהינתן הבסיס הארוך, הגובה והשוק.



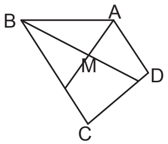
2. במשולש ABC העבירו ישר מקביל לצלע BC החותך את הצלע AB בנקודה D, ואת הצלע AC בנקודה E.
   א. הוכיחו כי המרובע DBCE הוא טרפז.
   ב. נתון: במשולש ABC זווית A בת 70° וזווית B בת 40°. מצאו את כל זוויות הטרפז.
   ג. הראו כי בכל טרפז סכום הזוויות הפנימיות הוא 360°.



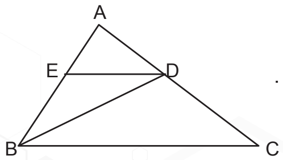
3. בטרפז ABCD (AD מקביל ל- BC) P על השוק AB, ו-Q על השוק CD , כך ש- PQ מקביל לבסיס AD.
   הראו כי המרובע PBCQ הוא טרפז.



4. בטרפז ABCD (AB מקביל ל- DC) האלכסון BD חוצה את הזווית B.
   הוכיחו כי המשולש BCD הוא משולש שווה שוקיים.



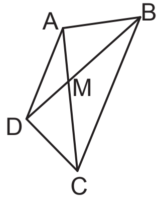
5. בטרפז ABCD (AD מקביל ל- BC) חוצה הזווית B נפגש עם חוצה הזווית A בנקודה M.
   הוכיחו כי המשולש ABM הוא ישר זווית.



6. במשולש ABC חוצה הזווית B חותך את הצלע AC בנקודה D.
   E נקודה על הצלע AB המקיימת: EB=ED. הוכיחו כי EBCD הוא טרפז.
7. א. הוכיחו: אלכסון במחומש משוכלל מחלק אותו למשולש שווה שוקיים ולטרפז שווה שוקיים.
   ב. הראו כי הקטע המחבר קדקוד במחומש המשוכלל עם אמצע הצלע שמולו, הוא ציר הסמטרייה של הטרפז המתאים.

8. בטרפז ABCD (AD מקביל ל- BC) M היא נקודת חיתוך האלכסונים.

הראו שהמשולש ADM דומה למשולש CBM.



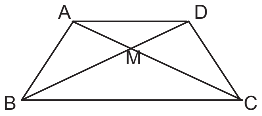
9. הראו כי בטרפז שווה שוקיים האנך האמצעי לבסיס אחד הוא האנך האמצעי גם לבסיס האחר.

10. בטרפז שווה שוקיים ABCD (AD מקביל ל- BC, AB=DC)

M היא נקודת חיתוך האלכסונים:

א. הראו כי המשולשים ADM ו-CBM הם משולשים שווי שוקיים.

ב. הראו כי המשולש MDC חופף למשולש MAB.



11. בטרפז שווה שוקיים ABCD

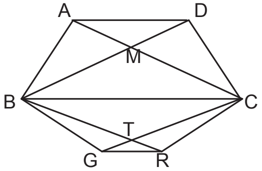
(AD מקביל ל- BC , AB=DC)

M היא נקודת חיתוך האלכסונים.

בטרפז שווה שוקיים GBCR (GR מקביל ל- BC , GB=RC)

T היא נקודת חיתוך האלכסונים.

הוכיחו כי המרובע MBTC הוא דלתון.



12. בטרפז ABCD (AD מקביל ל- BC) הנקודה E היא אמצע השוק DC.

נסמן: a הוא הבסיס AD, b הוא הבסיס BC, ו- h הוא גובה הטרפז.

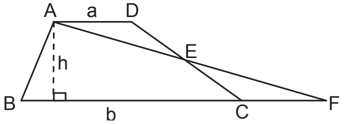
האריכו את הקטע AE עד לנקודת חיתוכו עם המשך הבסיס BC.

F היא נקודת החיתוך.

א. הוכיחו: המשולש ADE חופף למשולש FCE.

ב. בטאו באמצעות a, b, h את שטח המשולש ABF.

ג. בטאו באמצעות a, b, h את שטח הטרפז ABCD.



13. הגובה של טרפז הוא 12 ס"מ, אורך הבסיס הקצר 7 ס"מ, ואורכי שתי השוקיים: 13 ס"מ ו- 15 ס"מ.

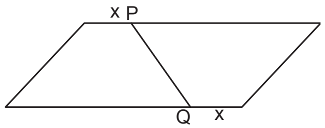
מצאו את אורך הבסיס הארוך של הטרפז.

4. מקבילית ותכנים נוספים שאפשר להוכיח באמצעות תכונותיה

1. דרך אפשרית לתאר את שרשרת ההיסקים המובילה מהגדרת המקבילית להיות חוצי זוויות סמוכות במקבילית מאונכים זה לזה היא:
   א. האלכסון במקבילית מחלק אותה לשני משולשים חופפים לכן...
   ב. הזוויות הנגדיות שוות זו לזו
   ג. מטיעון ב ומכך שסכום הזוויות במרובע הוא 360° נובע ש...
   ד. סכומן של זוויות סמוכות במקבילית הוא 180° ולכן...
   ה. סכומן של חצאי זוויות סמוכות במקבילית הוא 90° ולכן...
   ו. הזווית השלישית במשולש הנוצר משני חוצי הזווית הסמוכות וצלע המקבילית היא זווית ישרה.
2. מרובע שבו שתי צלעות נגדיות שוות ומקבילות הוא מקבילית: דרך אפשרית לתאר שרשרת היסקים המובילה משוויון והקבלה של זוג צלעות לתנאי ההגדרה של מקבילית היא:
   א. העברת אלכסון במרובע הנתון מחלק אותו לשני משולשים חופפים (על פי צלע משותפת, זוג זווית המתחלפות בין צלעות מקבילות, ואותו זוג צלעות השוות זו לזו לפי הנתון).
   ב. בשל חפיפת המשולשים, כל הזוויות המתאימות שלהם שוות זו לזו.
   ג. בין זוג הצלעות הנותר והאלכסון נוצרו שתי זוויות מתחלפות השוות זו לזו, ולכן זוג הצלעות הללו מקבילות זו לזו.
   ד. התקבל מרובע שבו יש שני זוגות של צלעות המקבילות זו לזו.
3. יש לדעת להבדיל בין שני המשפטים הבאים על פי מה שנתון ומה שצריך להוכיח:
   א. האלכסונים במקבילית חוצים זה את זה.
   ב. מרובע שבו האלכסונים חוצים זה את זה הוא מקבילית.
4. יש לדעת להבדיל בין שני הכיוונים של סדרת ההיסקים הבאה כמוכיחים את שני המשפטים שבדוגמא 3. שני הכיוונים מתבססים על התבוננות בשני משולשים הנוצרים מהאלכסונים במרובע אשר להם זוויות קדקודיות (השוות זו לזו).

<table>
<tr>
<td rowspan="2">א. הצלעות הנגדיות שוות זו לזו.
ב. הזוויות בשני המשולשים שליד צלע המקבילית מתחלפות בין שתי צלעות מקבילות.
ג. זוויות אלה שוות.
ד. מהטיעונים הקודמים נובע ששני המשולשים חופפים זה לזה.
ה. הצלעות המתאימות (החלקים של כל אלכסון) במשולשים הללו שוות זו לזו.
ו. כל אלכסון מחולק לשני חלקים שווים בנקודת החיתוך שלהם.</td>
<td>ח. מרובע שבו זוג צלעות מקבילות ושוות הוא מקבילית.
ז. הצלעות המקבילות זו לזו הן גם שוות זו לזו, כיוון שהן מתאימות במשולשים חופפים.</td>
<td>ח. מרובע שבו שני זוגות של צלעות מקבילות הוא מקבילית.
ט. באופן דומה, ניתן להראות שגם שני המשולשים האחרים שנוצרים על ידי חצאי האלכסונים - חופפים. לכן הצלעות הנותרות אף הן מקבילות זו לזו.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">ו. נוצרו שתי זוויות מתחלפות השוות זו לזו, ולכן זוג הצלעות הללו מקבילות זו לזו.
ה. הזוויות בשני המשולשים שליד צלע המקבילית שוות זו לזו (על סמך חפיפת המשולשים).
ד. מהטיעונים הקודמים נובע ששני המשולשים חופפים זה לזה.
ג. לשני המשולשים זוויות קדקודיות השוות זו לזו.
ב. הצלעות המתאימות (החלקים של כל אלכסון) במשולשים הללו שוות זו לזו.
א. כל אלכסון מחולק לשני חלקים שווים בנקודת החיתוך שלהם.</td>
</tr>
</table>

5. להלן דוגמאות למשפטים שהמשפטים ההפוכים להם אינם נכונים:
   - א. במקבילית האלכסון מחלק אותה לשני משולשים חופפים, אבל לא כל מרובע שהאלכסון מחלק אותו לשני משולשים חופפים הוא מקבילית (הוא יכול להיות גם דלתון).
   - ב. במקבילית חוצי זוויות סמוכות מאונכים זה לזה, אבל לא כל מרובע שבו זוג חוצי זוויות סמוכות מאונכים זה לזה הוא מקבילית (הוא יכול להיות גם טרפז).
6. רצוי להציג בפני התלמידים יותר ממהלך היסקי אחד להוכחה. להלן שלושה מהלכים שונים להוכחת המשפט: בטרפז שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות זו לזו.
   - א. שני הבסיסים בטרפז מקבילים, ולכן הגבהים המורדים משני קצות הבסיס הקטן לבסיס הגדול שווים זה לזה. שני המשולשים המתקבלים ליד השוקיים חופפים זה לזה (צלע, צלע וזווית ישרה), לכן זוויות הבסיס שוות זו לזו.
   - ב. דרך אחד מקדקודי הטרפז מעבירים מקביל לשוק הנגדית. מתקבלת מקבילית שצלעותיה מונחות על ישרי הבסיסים, על השוק ועל המקביל לשוק. הצלעות הנגדיות במקבילית (השוק והמקבילה לה) שוות זו לזו. מתקבל משולש שווה שוקיים שבו זווית הראש נמצאת בקדקוד הטרפז שעליו הועבר המקביל לשוק, ושוקי המשולש הם שוק הטרפז והמקביל לשוק האחרת. שתי זוויות הבסיס במשולש שווה השוקיים שוות זו לזו.
     - i. אם המקביל הועבר דרך קצה הבסיס הקטן, אז אחת מזוויות הבסיס של המשולש היא גם זווית בטרפז. הזווית השנייה במשולש היא זווית מתאימה בין מקבילים לזווית הבסיס השנייה של הטרפז, ולכן שתי זוויות הבסיס של הטרפז שוות זו לזו.
     - ii. אם המקביל הועבר דרך קצה הבסיס הגדול, אז אחת מזוויות הבסיס של המשולש היא זווית נגדית במקבילית לזווית הבסיס בטרפז. הזווית השנייה במשולש היא זווית מתחלפת בין מקבילים לזווית הבסיס השנייה של הטרפז, ולכן שתי זוויות הבסיס של הטרפז שוות זו לזו.
   - ג. מאריכים את שוקי הטרפז עד לפגישתם. בשל שוויון כל הזוויות (זווית משותפת וזוויות מתחלפות בין מקבילים) מתקבלים שני משולשים הדומים זה לזה. בגלל פרופורציית הדמיון ובגלל שוויון שוקי הטרפז, שני המשולשים הללו הם שווי שוקיים. לכן זוויות הבסיס של הטרפז שוות זו לזו.



7. א. הוכיחו בשתי דרכים שונות כי המקבילית הנתונה מחולקת לשני חלקים שווי שטח.
ב. הראו כי אמצע הקטע PQ הוא מרכז הסימטרייה הסיבובית של המקבילית.

5. מלבן ותכנים נוספים שאפשר להוכיח באמצעות תכונותיו

1. קבעו איזו מבין הטענות הבאות נכונה בכל מקרה, איזו מהן שקרית בכל מקרה ואיזו מהן עשויה להיות נכונה רק במקרים מסוימים:
   - חוצי זוויות סמוכות במלבן מאונכים זה לזה.
   - חוצי זוויות נגדיות במלבן מקבילים זה לזה.
   - אלכסוני המלבן מאונכים זה לזה.
   - אם במלבן הזווית בין אלכסון וצלע היא 60°, אזי האלכסון ושתי צלעות סמוכות של המלבן יוצרים משולש שווה שוקיים.
2. הפריכו באמצעות דוגמה נגדית את הטענות שקבעתם לגביהן כי אינן נכונות בכל מקרה.
3. הוסיפו תנאי או תנאים לטענות שקבעתם שהן עשויות להיות נכונות במקרים מסוימים בלבד, כך שתתקבל טענה שהיא נכונה בכל מקרה. הוכיחו את הטענה.
4. שערו איזו מהטענות הבאות היא נכונה, בדקו את השערתכם והוכיחו את הטענה או הפריכו אותה:
   - מרובע שבו האלכסונים שווים זה לזה הוא מלבן.
   - אלכסוני המלבן מחלקים אותו לארבעה משולשים שווי שטח.
   - חוצי הזוויות במלבן יוצרים מלבן.
   - מקבילית שבה סכום של זוג זוויות נגדיות הוא 180° היא מלבן.
5. מנקודה שעל היקף המלבן מורידים אנך לכל אחד מאלכסוני המלבן. שערו כיצד סכום האורכים של שני האנכים תלוי, אם בכלל, בנקודה שנבחרה. בדקו את השערתכם והוכיחו אותה.

6. הוכחה על דרך השלילה

אפשר להעלות אנך אחד בלבד מנקודה על ישר (הטענה נוגעת ליחידות; הקיום ידוע כבר).

א. שתי אפשרויות: אפשר להעלות אנך יחיד או שאפשר להעלות יותר מאנך אחד.
ב. בירור השאלה: מה היה קורה אילו היה אפשר להעלות שני אנכים שונים מנקודה אחת?
ג. התבהרות: היו מתקבלות שתי זוויות ישרות וזרות שמוכלות ממש בזווית שטוחה.
ד. תוצאה זו סותרת את הידוע שסכום של שתי זוויות ישרות הוא זווית שטוחה.
ה. נותרת אפשרות יחידה, שהיא: אפשר להעלות אנך אחד בלבד.

7. מעוין וריבוע

1. קראו את התיאור הבא, ושרטטו תרשים מתאים. לאחר מכן ענו על השאלות.

ABCD מקבילית. N אמצע הצלע AB. E נקודה כלשהי על הצלע CD כך ש- AE מאונך ל- BE.

א. האם ניתן להסיק ש- NBCE הוא מעוין? אם כן, הוכיחו. אם לא, הסבירו מדוע לא.

ב. מוסיפים לשאלה נתון נוסף: AB=2BC. האם ניתן להסיק ש- NBCE הוא מעוין? אם כן, הוכיחו. אם לא, הסבירו מדוע לא, ורשמו נתון נוסף, חלופי, אשר ממנו ניתן יהיה להסיק ש- NBCE הוא מעוין.

2. קראו את התיאור הבא, ושרטטו תרשים מתאים. לאחר מכן ענו על השאלה.

נתון ריבוע ABCDשאלכסוניו נפגשים בנקודה O.

G נקודה על האלכסון BD כך ש AG חוצה זווית DAO.

H נקודה על האלכסון BD כך ש CH חוצה זווית BCO.

הראו שכאשר מסובבים את הריבוע בחצי סיבוב סביב הנקודה O, הנקודה G תהיה מונחת במיקום הקודם של הנקודה H.

הוכיחו כי המרובע AGCH הוא מעוין.

3. קבעו אילו מבין הטענות הבאות נכונות:

א. כל תכונות המעוין תקפות בריבוע, ולכן כל מעוין הוא ריבוע.

ב. כל תכונות המלבן תקפות בריבוע, ולכן כל ריבוע הוא מלבן.

ג. כל תכונות הדלתון תקפות בריבוע, ולכן כל ריבוע הוא דלתון.

ד. כל תכונות הריבוע תקפות במעוין, ולכן כל ריבוע הוא מעוין.

ה. דלתון שהוא גם מקבילית הוא ריבוע.

4. קבעו אילו מבין הטענות הבאות נכונות:

א. מרובע שבו האלכסונים שווים זה לזה ומאונכים זה לזה הוא ריבוע.

ב. מרובע שבו שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו והאלכסונים שווים זה לזה ומאונכים זה לזה הוא ריבוע.

ג. מרובע שבו האלכסונים חוצים את כל זוויותיו הוא מעוין.

ד. מרובע שבו הקטעים המחברים את אמצעי הצלעות יוצרים מעוין הוא מלבן.

ה. מרובע שבו חוצי הזוויות יוצרים מלבן הוא מלבן.